UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación

Selección, organización y secuenciación del conocimiento matemático mediante teoría de grafos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Angélica Martínez Zarzuelo

Directores

María José Fernández Díaz

Eugenio Roanes Lozano

Madrid, 2015

ISBN: 978-84-09-01237-4

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Departamento de Métodos de Investigación
y Diagnóstico en Educación

SELECCIÓN, ORGANIZACIÓN Y SECUENCIACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE GRAFOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Angélica Martínez Zarzuelo

Bajo la dirección de los doctores

Mª José Fernández Díaz

Eugenio Roanes Lozano

MADRID, 2015

Quiero mostrar mi agradecimiento a dos grandes familias.

Por un lado a mi familia académica, los directores de esta tesis doctoral, Dra. Mª José Fernández Díaz y Dr. Eugenio Roanes Lozano, por su excelente labor de dirección mediante su dedicación, ayuda, sabios consejos y aportaciones y, no menos importante, por su cariño.

Por otro lado a mi familia biológica, quien además de otros muchos valores me ha inculcado el del esfuerzo constante y la lucha diaria por aquello que se desea.

Mostrar también un agradecimiento muy especial a mi marido, a quien dedico esta tesis doctoral, porque ha demostrado ser, una vez más, mi gran compañero de viaje.

A David,

por su cariño, comprensión y apoyo

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

RESUMEN

Es cierto que la normativa educativa establece bases para la selección, organización y secuenciación de los contenidos objeto de enseñanza. Sin embargo, en cuanto a la selección, únicamente determina aquellos contenidos que deben considerarse mínimos. Asimismo, en relación a la organización y secuenciación, el nivel más preciso que contempla es el correspondiente a bloque de contenido. Además, respecto a estos tres procesos, no existe, por otra parte, ningún criterio preciso que los determine.

Pues bien, a pesar de que la normativa educativa advierte, respecto a la organización y secuenciación a este nivel de contenidos, el carácter simplemente orientativo de ambos, concreciones curriculares tales como los libros de texto reproducen casi de forma literal lo establecido al respecto por la normativa educativa de la que derivan.

Teniendo en cuenta que la realidad es que los libros de texto han sido durante mucho tiempo una pieza fundamental para, entre otros, la planificación de la enseñanza, el hecho anterior se traduce prácticamente en una única forma de presentación del conocimiento en el trabajo diario de aula durante todo este tiempo.

Es por ello por lo que se cree que nuevas formas de selección, organización y secuenciación de contenidos, basadas además en criterios científicamente fundamentados, pueden ser más que bienvenidas en el ámbito educativo. Para dar respuesta a esta cuestión, se desarrolla la presente investigación, con el objetivo central de proponer y aplicar una metodología que permita el análisis de nuevas formas de selección, organización y secuenciación del conocimiento fundamentadas, además, en el aprendizaje significativo.

Para ello y como base de la metodología propuesta, se establece un criterio epistemológico de estructuración del conocimiento que permite la determinación de una relación entre pares de contenidos acorde a la fundamentación de unos contenidos en otros. Este criterio, basado en el aprendizaje significativo, proporciona así una forma de organización de contenidos en una estructura de carácter no lineal.

Para el análisis de esta estructura y como fundamento científico de la propuesta metodológica desarrollada en este estudio, se hace uso de una teoría matemática que no se ha visto aplicada para una finalidad como la aquí presentada, si bien, se ha empleado en una gran variedad de ámbitos y con fines muy diversos. Esta teoría es la teoría de grafos.

La teoría de grafos ofrece entonces a este estudio dos opciones principales muy interesantes. Por un lado, permite la posibilidad de modelizar la estructura de contenidos diseñada mediante su elemento principal, el grafo. Y por otro lado, sus técnicas propias proporcionan unas herramientas esenciales para el análisis de tal estructura.

Estas técnicas propias se combinan, además, para alcanzar el propósito establecido en este estudio, con un factor computacional que dota a la metodología propuesta de un carácter aún más novedoso. Este factor consiste en el uso de un tipo de software que no se ha empleado, hasta el momento, para dar solución a cuestiones como las aquí planteadas, aunque ha sido ampliamente utilizado para estudios de diversa índole. Concretamente se trata de un software especializado en visualización y análisis de información con estructura de red y, por tanto, de un tipo de software perfectamente aplicable a la estructura de contenidos aquí diseñada.

Así, la combinación de la teoría de grafos por un lado, y el aporte computacional por el otro, va a permitir dar respuesta al problema planteado y, con ello va a dar lugar a una propuesta metodológica para el análisis de nuevas formas de selección, organización y secuenciación de los contenidos objeto de enseñanza.

Para este fin el presente estudio se estructura en dos partes bien diferenciadas. En la primera de ellas se desarrollan aspectos de carácter teórico. En esta parte se realiza por ello, en primer lugar, un estudio de los procesos de selección, organización y secuenciación de contenidos en la normativa educativa y en los libros de texto como concreciones curriculares de la misma. Por otra parte, y con vistas en la determinación del criterio establecido de estructuración del conocimiento, se destaca y argumenta la importancia, en el contexto de esta investigación, de considerar la estructura interna de una disciplina como factor esencial para la estructuración de los contenidos que la constituyen.

Por otro lado, se analiza la fundamentación teórica con y sin entidad de teoría que considera la estructuración del conocimiento como base del aprendizaje significativo. Así, en base a ella, y con motivo de los abundantes puntos de encuentro entre las diferentes teorías, se decide considerar una fundamentación ecléctica que combine los aspectos más relevantes de las mismas en el contexto de este estudio y que ofrezca un marco teórico significativo para el mismo.

En esta primera parte, se realiza además una revisión de los estudios relacionados con la presente investigación. Por otro lado, se introducen las nociones básicas de la teoría de grafos, base de este estudio y se ofrece una muestra de la gran variedad de aplicaciones en las que esta teoría ha desempeñado un papel fundamental.

Asimismo, se estudian diferentes opciones de software para la visualización y análisis de información con estructura de red y se eligen los dos paquetes de software que se consideran más adecuados para el propósito de esta investigación.

Una vez tratados estos aspectos teóricos y con el fin de aplicar, además de proponer, una metodología para la selección, organización y secuenciación de contenidos se procede al diseño y puesta en práctica de la misma.

Para ello se tiene en cuenta una parte del conocimiento lo suficientemente amplia como para demostrar la viabilidad y el éxito de tal metodología. Concretamente, se considera el conocimiento matemático propio de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria del sistema educativo español.

Aunque la lógica de la estructura interna de la matemática como disciplina ha tenido que ver, entre otros aspectos, en esta elección de puesta en práctica, es preciso mencionar que la metodología desarrollada en este estudio es perfectamente transferible tanto a otras disciplinas, como a otros niveles educativos. De hecho esta es una de las características que dota a la propuesta metodológica de un cierto carácter de universalidad.

Se considera entonces para tal fin una muestra de cuarenta libros de texto de la materia de Matemáticas de los cuatro cursos que constituyen la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. A partir de ellos, y en base al criterio de estructuración determinado, se establece una relación entre los diferentes contenidos contemplados en los libros de texto. Esta relación se fundamenta concretamente en la necesidad que supone para la comprensión de un cierto contenido el conocimiento de otro, por lo que contempla los principios de un aprendizaje significativo.

La modelización de la estructura determinada a partir del conjunto de contenidos y la relación entre ellos se realiza entonces mediante un grafo. De esta forma, los nodos del grafo simbolizan los diferentes contenidos, mientras que las aristas del mismo representan los elementos correspondientes de la relación establecida.

Sobre este grafo se llevan a cabo entonces una serie de técnicas propias de la teoría de grafos que permiten la elaboración de otro grafo que determina exhaustivamente la relación entre contenidos. Debido al tamaño del mismo el factor computacional de esta metodología desempeña un papel fundamental en este proceso.

Las múltiples posibilidades de análisis sobre este grafo completan así la metodología que permite el estudio de nuevas formas de selección, organización y secuenciación de, en este caso, el conocimiento matemático de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Dentro de las principales consecuencias que se tienen al respecto, cabe destacar que el estudio pormenorizado del grado de este grafo ha resultado ser una técnica adecuada de selección de contenidos, ya que ha permitido identificar con exactitud una serie de contenidos de gran interés. Por un lado, se han identificado aquellos contenidos que pueden considerarse de mayor importancia dentro del conjunto de contenidos considerado. Ello, en el sentido de ser contenidos requeridos para el conocimiento de una cantidad considerable de otros contenidos del conjunto. Por otro lado, se han podido identificar también aquellos contenidos entendidos como los más complejos, en este caso, por necesitar de una gran cantidad de contenidos para su comprensión.

Por otra parte, un análisis de estructura de clusters sobre el grafo elaborado ha permitido identificar formas de organización de contenidos diferentes a las habituales. Esta técnica de la metodología ha demostrado así la existencia de otras organizaciones de contenidos de gran interés debido a la significatividad del criterio en la formación de las mismas.

El estudio de determinados subgrafos del grafo elaborado ha mostrado ser, por otro lado, de gran utilidad como apoyo a la determinación de secuencias entre diferentes contenidos.

Lo anterior completa una metodología que permite un amplio abanico de análisis exploratorios debido, además, a su carácter dinámico. Por todo ello la metodología propuesta y aplicada en la presente investigación se considera de gran utilidad no solamente en procesos relacionados con la planificación de la enseñanza como la selección, organización y secuenciación de contenidos, sino también para otros fines tales como el desarrollo de concreciones curriculares.

Así, esta forma de dar solución a la necesidad detectada en la estructuración de contenidos constituye el punto de partida de una gran diversidad de posibles investigaciones futuras. Se cree por ello que esta puede ser de interés para la comunidad educativa.

ABSTRACT

The educational laws establish the bases for selecting, organizing and sequencing contents. Nevertheless, regarding selecting, it only specifies those contents that should be considered the minimum. Regarding organizing and sequencing, the most precise level specified is "content block". Moreover, regarding these three processes, no precise criterion to determine them exists.

Despite educational laws remark that sequencing and organization at this level are only orientative, curriculum developments such as textbooks reproduce almost literally what the applicable educational standards propose.

Taking into account that books have been for a long time key for, among others, teaching planning, the fact just mentioned above translates in an almost unique way to present knowledge in the classroom.

That is why it is believed that new ways for selecting, organizing and sequencing contents, based on criteria scientifically based, could be welcome by the educational environment. This research is developed in order to try to solve this problem, with the main goal of proposing and applying a methodology that allows the analysis of new ways of selecting, organizing and sequencing contents (founded on significative learning).

An epistemological criterion for structuring knowledge that allows establishing a relation between contents (according to the foundation of each content on others) is established as a foundation of the proposed methodology. This criterion is based on significative learning and provides a non-linear way of organizing the contents.

Graph theory is the mathematical theory that has been chosen to analyze this structure and as scientific grounding of this study. Although graph theory has been applied to a great variety of applications and environments, as far as we know, it hasn't been applied to the purpose of this work before.

Graph theory offers two very interesting possibilities to this study. On one hand, it allows to modelize the structure of contents through the use of graphs. On the other, its techniques provide essential tools for analyzing such structure.

Moreover, these techniques are combined with a computational approach, in order to reach the goals of this study, what makes the proposed methodology further novel. As far as we know, this kind of software hasn't been used so far to solve problems like those proposed here, although it

has been used for several other goals. More precisely, the software used is specialized in visualization and information analysis of networks, and is therefore suitable for the structures of contents designed here.

Combining graph theory and a computational approach allows giving an answer to the proposed problem. This way, a new methodological proposal for analyzing new ways of selecting, organizing and sequencing contents is obtained.

In order to achieve this goal, the present study is structured in two clearly differenced parts. Theoretical aspects are developed in the first part. A study of existing ways of selecting, organizing and sequencing contents in educational standards and in textbooks (considered as curricular developments) is firstly included in this part. Besides, in order to determine the criterion established for structuring knowledge, the importance of considering the internal structure of the subject as the main factor for structuring its contents is remarked and argued.

Moreover, the theoretical foundation (with and without entity as a theory) that considers structuring knowledge as base for significative learning has been analized. Thereby, based on it, and because of the many common points between the different theories, an eclectic foundation that combines the most relevant aspects of them (in the context of this study) and that offers a significative theoretical framework, has been considered.

A review of related works is also included in the first part. Basic notions on graph theory and an overview of the great variety of applications where this theory has been key, is included.

Also, different software pieces for network visualization and analysis are studied. The two packages that fit best to the purpose of this work are chosen.

Once the theoretical aspects are treated, and focusing not only on proposing but on applying a methodology for selecting, organizing and sequencing contents, we proceed to its design and to put it into practice.

For that purpose, a piece of knowledge big enough to prove the viability and the success of such methodology is to be considered. More precisely, the knowledge corresponding to the Spanish *Educación Secundaria Obligatoria* (Secondary Compulsory Education) has been considered.

Despite the logic character of the internal structure of the subject mathematics has to do (among other reasons) with the choice of this particular subject, we would like to mention that this methodology can be applied both to other subjects and to other educational levels. In fact, this is one of the characteristics that provide the methodological proposal with certain universal character.

We have considered a sample of forty mathematics books (of the four courses that correspond to the Compulsory Secondary Education in Spain). From them, and using the chosen structuring criterion, a relation between contents included in the textbooks is established. This relation is based on the need that one content has of understanding other contents in order to be understood (so this relation looks at the principles of a significative learning).

The modeling of the structure determined from the set of contents and the relation between contents is done using a graph. The nodes of the graph represent the contents and the directed edges represent which contents are related in the relation considered.

Different techniques borrowed from graph theory are applied to this graph in order to obtain another graph that exhaustively gathers the relation between contents. Let us underline that the size of the graph requires the aid of computers to process it.

The multiple possibilities of analysis of this graph complete the methodology that enables the study of new ways of selecting, organizing and sequencing contents of, in this particular case, the mathematical knowledge of Secondary Compulsory Education.

One of the main consequences is that the detailed study of the degree of the graph has turned out to be an adequate technique for contents selecting, as it has allowed identifying with precision a subset of contents of great interest. On one hand, those contents that can be considered of the highest importance (within the set of contents) have been identified. We mean “important” in the sense of being required for the understanding of a considerable amount of contents in the set. On the other hand, those contents that can be considered the most complex (in the sense of needing a big number of contents to be understood) have also been identified.

Besides, a cluster analysis of the elaborated graph has allowed us to identify ways of organizing contents that are not the usual ones. This technique of the methodology has proved thereby the existence of other ways of organizing contents of great interest, due to the meaningfulness of the criterion followed to find them out.

Moreover, the study of certain subgraphs of the elaborated graph has turned out to be very useful as an aid for determining sequences between different contents.

The above completes a methodology that allows a wide variety of exploratory analysis due to its dynamic character. For all that, the methodology proposed and applied in the present research is considered to be of utility, not only in processes related to teaching planning (like selecting, organizing and sequencing contents), but also in others like curricular concretions.

This way of solving the need detected for contents structuring is the starting point for a great diversity of possible future research. Therefore, we believe this work could be of interest for the educational community.

INTRODUCCIÓN

Una adecuada selección, organización y secuenciación de los contenidos objeto de aprendizaje es fundamental en los procesos de planificación de la enseñanza de cualquier ámbito educativo, tanto de la educación formal como de la no formal. Es claro que, dentro de la educación formal, las bases que establece la normativa educativa conllevan una primera aproximación de la selección y organización de los contenidos que deben ser llevados al aula. Sin embargo, unas concreciones curriculares que aproximen este marco normativo a uno propositivo son esenciales para la práctica diaria (Schubring, 1987; Goñi, 2011).

En este sentido, es bien conocido que los libros de texto llevan desarrollando durante mucho tiempo cierta labor de aproximación (Cockcroft, 1985; Serrano, 2000). Así, atendiendo a la selección de los contenidos que en ellos se presentan, es cierto que estos son de un mayor nivel de concreción que los establecidos en la normativa educativa de la que los libros de texto derivan. Como también es cierto que, dentro de una etapa y nivel educativo concreto, su estructuración es más precisa que la que marca la normativa en cuestión, en el sentido de que estos consideran una estructuración más fina de contenidos.

Ahora bien, y a pesar de ser la propia normativa educativa la que advierte que la estructuración que ella establece es simplemente orientativa, la mayoría de los libros de texto tienden a reproducirla, generando, de esta manera, prácticamente una única forma de organización. Por otra parte, y en relación con la secuenciación de contenidos, el propio formato de los libros de texto conduce a una planificación de la enseñanza en la que la secuenciación de los contenidos de aprendizaje es principalmente lineal, acorde al orden de aparición de los mismos en los libros de texto (Ausubel y Barberán, 2002).

Este tipo de cuestiones llevan así a reflexionar sobre si otras formas de organización y secuenciación de contenidos educativos son posibles. Sin embargo, y a pesar de las teorías existentes en este contexto (Ausubel, 1963; Bruner, 1966; Gagnè, 1970, 1973; Ausubel, Novak y Hanesian, 1976; Reigeluth y Stein, 1983; Coll, 1987; Coll y Rochera, 1990; Reigeluth, 1999; Moreira, 2000; Bruner, 2003, 2004; Reigeluth, 2013) ninguna de ellas propone criterios específicos cuya aplicación pueda contribuir a la creación de nuevas formas de estructuración del conocimiento. Por otro lado, y también en este contexto, otras fundamentaciones teóricas existentes sin entidad de teoría (Kopp, 1967; Tennyson, 1972; Landa, 1976; Rodríguez, 1983; Coll y Solé, 1989; Coll, Marchesi y Palacios, 1990; Rico, 1997; Brihuega, Molero y Salvador, 1998; Gallegos, 1998; Álvarez, Balaguer y Carol, 2000; Quesada, 2001; Zabalza, 2009), aunque sí aportan criterios específicos para la estructuración del conocimiento, basados además en diferentes enfoques de selección, organización y secuenciación de contenidos, ninguno de ellos se lleva a la práctica de una forma lo suficientemente amplia y precisa como para poder considerar tales aportaciones más allá de propuestas puramente teóricas.

Es por ello por lo que se cree conveniente la formulación y aplicación de nuevas formas de estructuración del conocimiento, que, basadas en la fundamentación teórica existente, permitan, entre otros, el enriquecimiento de los procesos de planificación de la enseñanza y, con ello, de las actuales formas de instrucción.

Así, la presente investigación, no solamente define de forma precisa nuevas formas de estructuración del conocimiento, sino que además propone una metodología y la pone en práctica en un campo lo suficientemente amplio como para poder validarla y extraer conclusiones al respecto.

Para ello, y, teniendo en cuenta uno de los aspectos que se considera primordial en este contexto como es el tener presente la estructura interna de la disciplina a la que pertenecen los contenidos objeto de enseñanza, así como el respetar la lógica de la misma, se definen, en este estudio, unos criterios de estructuración del conocimiento de carácter epistemológico, donde la estructura interna de la disciplina en cuestión, desempeña un papel fundamental. Tales criterios garantizan así una forma de estructuración de contenidos que dota de gran significatividad tanto a la selección, como a la organización y secuenciación de los mismos.

Por otro lado, y considerando otra característica que se cree de gran aportación a este respecto, como es la posibilidad de un análisis de tipo visual de la consecuente estructuración de contenidos, se tienen en cuenta para este estudio las diferentes técnicas existentes de representación gráfica del conocimiento (Armbruster y Anderson, 1982; Johnson y Pearson, 1984; Geva, 1985; Novak y Gowin, 1988; Howard, 1989; Fisher, 1990; Schvaneveldt, 1990; Kitchin, 1994; Buzan y Buzan, 1996; Galagovsky, 1996; Hyerle, 1996; de Castro, 1999; Heimlich y Pittelman, 2001; O'donnell, Dansereau y Hall, 2002; Hyerle y Alper, 2011). Sin embargo, en este contexto, de nuevo ocurre que las opciones que existen al respecto en el ámbito educativo, aunque son de gran interés para otros propósitos, no posibilitan la puesta en práctica del análisis visual de una estructuración lo suficientemente amplia como para ser de utilidad como técnica de investigación.

Es en base a ello por lo que la presente investigación hace uso de unas técnicas fundamentadas en una teoría que, si bien se ha utilizado en ámbitos muy diversos y con fines muy dispares (Martín y Méndez, 2004; Leydesdorff, 2007; Puchades, Mula y Rodríguez, 2008; Cardozo, Gómez y Parras, 2009; Carlos, Gallardo y Colomer, 2011; Pino, Jiménez, Ruíz y Bailón, 2011; Gómez, Zarrazola, Montero y Yañez, 2012; Sánchez, Moratalla y Sanz, 2012; Nieto, 2013; Wilson, 2013; Clough, Gollings, Loach y Evans, 2014; Romo, Vélez, Solís, Luna y Espinoza, 2015), resulta de singular aplicación para el propósito aquí presentado. Se trata de la teoría de grafos. Esta teoría aporta para este estudio, por un lado, la posibilidad de modelizar la organización de contenidos diseñada mediante una estructura no lineal idónea para este propósito, la estructura de grafo, y por otro lado, la viabilidad de utilización de técnicas propias para el análisis de la misma.

Esta doble aportación hace así que el considerar la teoría de grafos como fundamento de la metodología y puesta en práctica para el propósito de esta investigación, resulte, además de idóneo, realmente novedoso.

Por otra parte, existe además un segundo aspecto relacionado con la metodología propuesta en la presente investigación, que la dota, si cabe, de un mayor nivel de innovación. Se trata del uso combinado de las técnicas propias de la teoría de grafos y de software especializado en visualización y análisis de información con estructura de red. Y es que, este tipo de software, aunque, ampliamente utilizado en una gran diversidad de temas de actualidad (White, Batagelj y Mrvar, 1999; Peñaranda, Quiñones y Osca, 2009; Camino, 2012; Conway y White, 2012; Raper, 2012; Álvarez, Kuz y Falco, 2013; Heymann y Le Grand, 2013), no se ha visto aplicado en un propósito como el aquí propuesto.

Este factor computacional de la metodología permite además el tratamiento de una gran cantidad de información, así como la complementación de análisis gráficos y numéricos, hechos que, en su conjunto, ofrecen, por otra parte, la posibilidad de llevar a cabo análisis exploratorios de gran riqueza, convirtiendo así a este factor en otra base fundamental de esta metodología.

Además de todo lo anterior, la combinación del uso de técnicas de teoría de grafos y software especializado, contribuye también a que la metodología presentada no se trate únicamente de una propuesta teórica, ya que su puesta en práctica es más que factible. Prueba de ello es la aplicación de la misma llevada a cabo con éxito, también en este estudio, en un ámbito lo suficientemente amplio como es el conocimiento matemático dentro de la etapa educativa de Educación

Secundaria Obligatoria del sistema educativo español considerada desde su origen hasta la actualidad.

Todo ello contribuye a que la metodología empleada en esta investigación no solamente sea novedosa, innovadora y de actualidad, sino que también posea un gran carácter práctico.

Así, en base a todo lo anterior, se ha planteado para la presente investigación el siguiente objetivo general:

Proponer una metodología basada en la aplicación de técnicas propias de la teoría de grafos y el uso de software para el estudio de nuevas posibles formas de selección, organización y secuenciación del conocimiento matemático que contribuyan al enriquecimiento de los procesos de enseñanza para lograr un aprendizaje significativo y aplicar esta metodología a una parte del conocimiento matemático contemplado en el sistema educativo español.

Para el logro de este objetivo general, se han establecido los siguientes objetivos específicos.

- Analizar la normativa educativa respecto a la matemática como referencia básica del estudio.

- Definir las características propias de la matemática como disciplina científica en el contexto del trabajo.

- Fundamentar científicamente el estudio en función de las teorías existentes sobre la enseñanza y el aprendizaje significativo del conocimiento que consideran como base la estructuración del mismo.

- Revisar los estudios realizados en relación con el propósito del trabajo.

- Introducir la teoría de grafos y el uso de software especializado como base de la propuesta metodológica de este estudio.

- Identificar técnicas de la teoría de grafos para la creación de nuevas formas de selección, organización y secuenciación del conocimiento.

- Diseñar y elaborar un grafo que modelice, acorde a un criterio de carácter epistemológico, la estructura del conocimiento matemático propio de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria del sistema educativo español.

- Aplicar la metodología propuesta al grafo de estudio elaborado, y analizar e interpretar los resultados obtenidos.

Para la consecución de los objetivos específicos así establecidos y, en consecuencia, del objetivo general, la presente investigación se ha estructurado en dos partes bien diferenciadas. Consta así de una primera parte en la que se consideran todos los aspectos teóricos de la misma y una segunda parte en la que se desarrolla la aplicación de la metodología propuesta para el conjunto del conocimiento matemático propio de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria del sistema educativo actual.

Concretamente, la primera parte consta de ocho capítulos. En el primer capítulo se lleva a cabo un estudio del marco legal de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria mediante el análisis de tres aspectos fundamentales: la normativa educativa correspondiente a esta etapa desde el origen de la misma, los libros de texto como concreciones curriculares que se derivan de ella y los procesos de selección, organización y secuenciación de contenidos matemáticos, tanto en la normativa educativa como en sus mencionadas concreciones curriculares.

En el segundo capítulo se mencionan algunas de las especificidades de la matemática como disciplina científica, haciendo hincapié en las particularidades de su estructura interna en relación a la riqueza con la que se relaciona el conocimiento que la constituye.

El tercer capítulo corresponde a la fundamentación teórica en el contexto de la investigación, donde se hace una revisión de las teorías existentes que fundamentan la enseñanza y el aprendizaje significativo del conocimiento, considerando como base la estructuración del mismo. Se tienen en cuenta así, en primer lugar, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, la teoría instruccional de Bruner y su aprendizaje en espiral, así como la teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè. En segundo lugar, se analiza el punto de encuentro de estas tres teorías en la teoría de la elaboración de Reigeluth y se desarrolla, a partir de todas ellas, una fundamentación ecléctica para la presente investigación, considerando una combinación de las características principales de cada una de ellas.

En el cuarto capítulo se hace alusión a la importancia que tiene la representación gráfica del conocimiento organizado para los procesos de organización y secuenciación del mismo, y se realiza, en base a ello, una revisión de las diferentes opciones que existen al respecto. Se profundiza así en dos de ellas: los mapas conceptuales y las redes asociativas pathfinder, constituyendo el punto de partida para la estructura de grafo considerada en este estudio.

El quinto capítulo se dedica a realizar una revisión de los estudios relacionados con la presente investigación, haciendo referencia así, entre otros, a estudios con base en los fundamentos teóricos aquí considerados y que hacen uso, además, de técnicas de representación gráfica del conocimiento desarrolladas en esta investigación.

En el sexto capítulo se introduce la base teórica de la teoría de grafos, presentando los conceptos de esta teoría, así como los principales resultados de la misma que fundamentan el tipo específico de grafo y metodología empleados en esta investigación. Se describe además un estudio detallado de dos conceptos de la teoría de grafos fundamentales para la aplicación de esta investigación: la clausura transitiva y la reducción transitiva de un grafo.

El séptimo capítulo describe una muestra de estudios realizados para los que las técnicas de la teoría de grafos han resultado ser herramientas esenciales de investigación. Se hace mención así, tanto a una gran variedad de campos de aplicación como a propósitos de muy diversa índole, lo que ayuda a percibir el amplio abanico de posibilidades de aplicación que posee la teoría empleada en esta investigación.

En el octavo capítulo se lleva a cabo una revisión de las posibilidades existentes de software especializado en visualización y análisis de información con estructura de red y, tras la elección del uso combinado de dos paquetes de software, se presentan las características de cada uno de ellos más directamente relacionadas con este estudio.

La segunda parte de la presente investigación consta de dos capítulos, un primer capítulo, noveno de la investigación, en el que se tratan dos aspectos relevantes relativos al grafo de estudio: su diseño y su elaboración. Respecto al proceso de elaboración del grafo de estudio es preciso mencionar que este se divide en una serie de acciones secuenciadas, de forma que, partiendo de la determinación concreta de los nodos y aristas de un grafo y, tras una serie de procesos realizados con ayuda computacional, se obtiene el grafo que modeliza la información propósito de estudio para la aplicación de esta investigación.

En el segundo capítulo de esta segunda parte, décimo capítulo de la investigación, se procede al análisis de dicho grafo. Para ello se consideran los paquetes de software seleccionados para tal propósito en un capítulo anterior y se llevan a cabo análisis, tanto de tipo gráfico como de tipo numérico. Estos análisis conducen así a la formulación de conclusiones prácticas sobre la selección, organización y secuenciación de los contenidos matemáticos de estudio.

Con esta investigación se pretende contribuir al enriquecimiento de procesos fuertemente relacionados con las formas de enseñanza, y muy especialmente con los procesos de planificación de la misma, tales como la selección, organización y secuenciación de contenidos objeto de instrucción, lo que implica también, en consecuencia, un propósito de contribución al enriquecimiento general de los procesos de aprendizaje basados en la significatividad.

Este estudio es pues una aportación científica que se considera de interés y relevancia para toda la comunidad educativa, puesto que además de la contribución mencionada, se propone y valida para tal fin, una novedosa metodología perfectamente transferible a otras áreas y niveles de educativos además del aquí considerado -la matemática en Educación Secundaria Obligatoria-, así como a otros campos de ámbito general de conocimiento.

Por todo ello se espera y confía en que el presente estudio pueda formar un punto de inicio de nuevas líneas de investigación.

PARTE I: MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1

EL MARCO LEGAL DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

1.1. Normativa educativa de la Educación Secundaria Obligatoria

Como es bien sabido, la Educación Secundaria Obligatoria es una etapa educativa española con origen en la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 (LOGSE, 1990). Nace fundamentada en la ampliación de la educación obligatoria de los 12 a los 16 años, a fin de adecuarla a la edad laboral inicial y equiparar el Sistema Educativo español con los de otros países de la Unión Europea.

A pesar de que esta etapa ha sufrido ciertas modificaciones a causa de la implantación de nuevas leyes orgánicas, como la Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006 (LOE, 2006), y la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) de 2013 (LOMCE, 2013), desde su origen se ha situado tras la Educación Primaria, estando dirigida al alumnado entre los 12 y los 16 años de edad, y siendo última etapa educativa para algunos de los alumnos que la cursan y etapa de carácter propedéutico para otros.

La LOGSE, primera ley orgánica que determina la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria, estuvo vigente durante 16 años, desde 1990 hasta 2006, momento en que fue derogada por la LOE. La LOE que mantiene esta etapa educativa, se ha visto modificada en el año 2013 por la LOMCE, la ley orgánica educativa española actualmente vigente.

La presente investigación, vinculada a la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria, debe fundamentarse en la LOE, ya que, pese a la vigencia actual de la LOMCE, esta en su disposición final quinta relativa al calendario de aplicación de la misma, en su punto 2 concerniente a Educación Secundaria Obligatoria establece que:

> *Las modificaciones introducidas en el currículo, la organización, objetivos, requisitos para la obtención de certificados y títulos, programas, promoción y evaluaciones de Educación Secundaria Obligatoria se implantarán para los cursos primero y tercero en el curso escolar 2015-2016, y para los cursos segundo y cuarto en el curso escolar 2016-2017. […]*

Debido a la programada implantación de las modificaciones establecidas por la LOMCE, relativas a esta etapa educativa para los cursos escolares 2015-2016 y 2016-2017, ciertas concreciones curriculares de esta nueva normativa no han estado disponibles en el comienzo de esta investigación, motivo por el que, aunque fundamentada principalmente en la LOE, se han empleado concreciones propias tanto de la LOGSE como de la LOE, todo ello con el fin de considerar la etapa de Educación Secundaria Obligatoria desde su comienzo.

La imposibilidad de emplear algunas concreciones curriculares propias de la LOMCE debida a factores temporales, no limita ni impide en absoluto la presente investigación, ya que, como podrá comprobarse en el desarrollo de la misma, su carácter globalizador induce con gran facilidad la aplicación tanto a nuevas concreciones curriculares, como a otras áreas de conocimiento o materias, e incluso a otras etapas educativas.

Además de estas tres leyes orgánicas educativas españolas que determinan, junto a otras etapas educativas, la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, es preciso tener en cuenta la normativa referente a las enseñanzas mínimas de esta etapa que se deriva de ellas.

Así, se considera, derivado de la LOGSE, el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (R.D.1007/1991, 1991), junto con sus modificaciones por el Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre (R.D.3473/2000, 2000).

Derivado de la LOE, se considera el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (R.D.1631/2006, 2006). Aunque este real decreto fue modificado por el Real Decreto 1190/2012, de 3 de agosto (R.D.1190/2012, 2012), este no forma parte del marco legal de esta investigación, ya que las modificaciones dispuestas de esta etapa, solo son referidas a aspectos relativos a una materia no contemplada en este estudio.

En relación a la LOMCE, se considera, en cierta medida, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (R.D.1105/2014, 2014).

El principal fin de la normativa educativa considerada, relativa a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, es la determinación del currículo básico para esta etapa. En esta dirección, se deduce de ella, entre otros muchos aspectos, la importancia de la noción de competencia.

Si bien en la en la normativa relativa a la LOGSE, no se dispone de un marco de competencias de forma explícita, esto sí acontece en la normativa relativa, tanto a la LOE, como a la LOMCE.

En la LOE se consideran una serie de competencias denominadas básicas (Monereo y Pozo, 2007; Pérez, 2007; Escamilla, 2008; Rico y Lupiáñez, 2008; Stiefel, 2008; Moya y Luengo, 2011; Tiana, 2011). En el anexo I de su Real Decreto 1631/2006 se fijan estas competencias básicas en *Competencia en comunicación lingüística*, *Competencia matemática*, *Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico*, *Tratamiento de la información y competencia digital*, *Competencia social y ciudadana*, *Competencia cultural y artística*, *Competencia para aprender a aprender* y *Autonomía e iniciativa personal*.

En la LOMCE se mencionan las competencias denominadas clave (Valle y Manso, 2013), y se disponen en su Real Decreto 1105/2014 considerando la *Comunicación lingüística*, la *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología*, la *Competencia digital*, el *Aprender a aprender*, las *Competencias sociales y cívicas*, el *Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor* y la *Conciencia y expresiones culturales*.

En esta normativa se indica, cómo es a partir del establecimiento y definición de las competencias de la etapa y la determinación de los objetivos para la misma, cuando se fijan los aprendizajes que se deben alcanzar durante esta etapa educativa, dando entrada, de esta forma, al diseño del currículo básico de cada una de las materias que forman la etapa.

En función de la ley orgánica educativa vigente en cada momento, la definición concreta de currículo ha variado. Para la LOGSE, el Real Decreto 1007/1991 define en su artículo 4º el concepto de currículo de la siguiente manera:

A los efectos de lo dispuesto en este Real Decreto, se entiende por currículo de la Educación Secundaria Obligatoria el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación que han de regular la práctica docente en esta etapa.

La LOE en su capítulo III, artículo 6 relativo al currículo, define este como:

A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley.

Mientras que la LOMCE en su artículo único.4, modifica el artículo 6 del capítulo III de la LOE, estableciendo que:

1. A los efectos de lo dispuesto en esta Ley Orgánica, se entiende por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas.

2. El currículo estará integrado por los siguientes elementos:

a) Los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.

b) Las competencias, o capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

c) Los contenidos, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias.

Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participen los alumnos y alumnas.

d) La metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes.

e) Los estándares y resultados de aprendizaje evaluables.

f) Los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.

Puede observarse como cada una de las tres leyes orgánicas consideradas establece su propia definición de currículo. Sin embargo, y teniendo en cuenta que la noción de currículo ha sido objeto de muchas reflexiones educativas (Rico, Castro y Coriat, 1997), este puede dividirse en cuatro componentes generales: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

1.2. Concreciones curriculares. Libros de texto

El currículo básico establecido por la normativa educativa (véase apartado 1.1. Normativa educativa de la Educación Secundaria Obligatoria), o currículo normativo, debe completarse con una serie de concreciones curriculares que permitan el desarrollo de las enseñanzas y su aplicación en el aula. Autores como Schubring (1987) y Goñi (2011), argumentan la necesidad de un mayor desarrollo de este currículo, y una mayor conexión entre la política educativa y las concreciones curriculares, destacando la importancia de estas últimas sobre la normativa educativa en la práctica de la enseñanza, y dando cabida así al denominado currículo propositivo.

Este desarrollo está legalmente contemplado, ya que la propia norma habla de los proyectos curriculares de centro (PCC) y de las programaciones de aula (PA) o unidades didácticas para referirse a los documentos, uno a nivel de centro y el otro a nivel de aula (unidades didácticas) que debieran servir para ese desarrollo […]. (Goñi, 2011, p.17)

Tanto para el desarrollo de concreciones curriculares de la normativa educativa, como para la planificación de los procesos de enseñanza, es preciso realizar reflexiones curriculares nada sencillas. En este sentido, la labor del profesorado es fundamental, quien ante todo, no debe ser un simple transmisor del currículo oficial adoptando sin cautelas su mismo esquema, y tratando de utilizarlo directamente en todos los niveles de planificación de una materia (Rico, 1998).

Una gran ayuda en el desarrollo curricular la ofrecen las editoriales, quienes elaboran materiales de diversa tipología, entre los que se encuentran proyectos curriculares, programaciones de aula, guías didácticas, libros de texto, etc. Al margen de los materiales comerciales, destacar que, aunque existen materiales no comerciales que aportan información curricular, la mayoría de ellos tratan una parte específica del currículo, no aportando una propuesta curricular completa que pueda servir de alternativa real a la que hacen las editoriales (Goñi, 2011).

Parece que dentro de los materiales curriculares comerciales, es el libro de texto quien ha constituido una ayuda inestimable desde su origen (Cockcroft, 1985), aproximando a las aulas el currículo normativo.

En relación al tratamiento legal de los libros de texto, la normativa educativa los ha contemplado, tal y como afirma Calderero (2003), como materiales didácticos necesarios para el desarrollo de las enseñanzas, y ha regulado su uso. Si bien estas referencias han tenido lugar, dentro de las tres leyes orgánicas consideradas en este estudio, no se establece nada global al respecto en la LOMCE, salvo unas indicaciones sobre los libros de texto en el contexto de la enseñanza de la Religión y el sistema de préstamo de libros de texto.

En lo establecido al respecto por la LOGSE, pueden considerarse, entre otros, el Real Decreto 388/1992, de 15 de abril, por el que se regula la supervisión de libros de texto y otros materiales curriculares para las enseñanzas de régimen general y su uso en los centros docentes (R.D.388/1992, 1992) y el Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de régimen general (R.D.1744/1998, 1998).

Esta legislación especifica, entre otros aspectos, los contenidos que deben contemplar los libros de texto, los principios por los que se deben regir, los procesos que deben seguir las editoriales, y los criterios de supervisión.

En relación a la LOE, es la propia ley orgánica la que fija las bases, estableciendo en su disposición adicional cuarta referente a los libros de texto y demás materiales curriculares, que:

1. En el ejercicio de la autonomía pedagógica, corresponde a los órganos de coordinación didáctica de los centros públicos adoptar los libros de texto y demás materiales que hayan de utilizarse en el desarrollo de las diversas enseñanzas.

2. La edición y adopción de los libros de texto y demás materiales no requerirán la previa autorización de la Administración educativa. En todo caso, éstos deberán adaptarse al rigor científico adecuado a las edades de los alumnos y al currículo aprobado por cada Administración educativa. Asimismo, deberán reflejar y fomentar el respeto a los principios, valores, libertades, derechos y deberes constitucionales, así como a los principios y valores recogidos en la presente Ley y en la Ley Orgánica 1/2004, de 28 de diciembre, de Medidas de Protección Integral contra la Violencia de Género, a los que ha de ajustarse toda la actividad educativa.

3. La supervisión de los libros de texto y otros materiales curriculares constituirá parte del proceso ordinario de inspección que ejerce la Administración educativa sobre la totalidad de elementos que integran el proceso de enseñanza y aprendizaje, que debe velar por el respeto a los principios y valores contenidos en la Constitución y a lo dispuesto en la presente Ley.

Esos materiales curriculares que cubren la distancia entre la normativa educativa y el trabajo diario en el aula son de difícil precisión conceptual (de Puelles, 2013). Conocidos habitualmente como libros de texto, se emplean también, entre otros términos, manuales escolares o libros escolares. A lo largo de la presente investigación se opta por la designación de libro de texto.

El término de manual escolar se adquirió con la finalidad de denominar a un documento manejable, tanto por su tamaño como por su contenido, con contenido propio de una materia o disciplina reflejada en el currículo.

En cuanto al término de libro escolar, Stray (citado por Borre (1996) y Love y Pimm (1996)), advierte que la diferencia se encuentra en que si bien el libro de texto puede entenderse como aquel que ha sido elaborado con el objetivo de ser utilizado en la enseñanza reglada, el libro escolar respondería a aquel que, aún siendo utilizado para la práctica de la enseñanza, no ha sido concebido con tal fin.

Estudios como los de Lerma (1995) y Harris (1997) resaltan los libros de texto como representaciones del currículo, siendo su papel principal el de actuar como nexos entre el currículo y la práctica en el aula.

De esta forma los libros de texto pueden verse como materiales curriculares que aproximan el currículo normativo al currículo propositivo. Así, autores como Ballesta (1995) los caracterizan como portadores y traductores del currículo. En la misma línea, para Goñi (2011) son:

[…] documentos que cubren la distancia existente entre los decretos curriculares y las programaciones de aula que el docente necesita para trabajar con sus estudiantes. En teoría este espacio debería estar ocupado por los proyectos educativos de centro y las programaciones de aula pero, en la realidad, son pocos los centros y docentes que construyen programaciones alternativas. El mayor número de los docentes recurren a los libros de texto y guías didácticas como referencia a la hora de organizar sus propias programaciones. (p.25)

Cabe destacar que el libro de texto fue desde sus inicios, y en cierta medida lo sigue siendo en la actualidad, el principal material curricular utilizado en las aulas. Serrano (2000) describe este hecho de la siguiente manera:

Los libros de texto son los materiales curriculares que usa, preferentemente, la mayoría de los profesores y profesoras de nuestro país en todos los niveles educativos, hecho que se constata por el enorme volumen de ventas que existe cada año. (p.98)

En todo su desarrollo ha ejercido, y ejerce, gran diversidad de funciones, como la de objeto de estudio, material de consulta, registro de actividades del alumno, colección de ejercicios propuestos, etc. Sin embargo, se destaca en mayor medida, si cabe, la función que desempeña como apoyo en la toma de decisiones curriculares y los procesos de planificación de la enseñanza. En este sentido, Boostrom (2001) afirma que el papel principal de un libro de texto no es presentar información, sino apoyar la instrucción.

Este es el principal motivo por el que es de gran importancia la existencia de cauces de comunicación entre políticos educativos, autores, editores de libros de texto, investigadores en educación y docentes. En ocasiones, la escueta información aportada por los primeros, las propias líneas de actuación de los segundos, acorde a sus propios intereses, y los caminos independientes de investigadores y docentes, hacen que el trabajo hacia una buena educación no se realice de forma coordinada y conjunta.

Con ello, es el último eslabón de la cadena, el docente, quien realiza la labor más importante y complicada de acercamiento del currículo a su trabajo diario en el aula. El docente, así, se apoya en el currículo normativo, concreciones curriculares, investigaciones relacionadas con su campo de actuación y muy especialmente, en los libros de texto elaborados por las editoriales.

En relación a ello, una de las primeras decisiones curriculares que algunos docentes consideran, es la elección del libro de texto más adecuado para los propósitos establecidos. Tal decisión, teniendo en cuenta la diversidad de editoriales existentes, no es tarea sencilla, ya que son muchas y muy diversas las variables que pueden evaluarse en este sentido (del Carmen, 1994; García, 1995; Monterrubio, 2000).

Sin embargo, teniendo en cuenta las investigaciones realizadas al respecto, y como ayuda a este tipo de elecciones, existen modelos de valoración de libros de texto que permiten elegir aquel que mejor se adapte a las necesidades pedagógicas del alumnado, como el de Monterrubio y Ortega (2009), creado para tal fin, y particularizado para el área de Matemáticas.

Ello es ejemplo de la importancia de la comunicación entre investigadores educativos y docentes. En este contexto y, debido al importante papel que ha desempeñado en la educación el libro de texto, existe una gran cantidad y variedad de investigaciones realizadas sobre este material educativo, de gran valor para la toma de decisiones curriculares.

Estudios sobre libros de texto

El papel fundamental que el libro de texto ha desempeñado en la educación desde su origen, se ve reflejado también en la gran cantidad de estudios realizados en torno a este material curricular. Además, la riqueza en su composición y propósito ha dado lugar a una gran variedad de análisis, desde puntos de vista muy diferentes.

En primer lugar, cabe preguntarse sobre las investigaciones que se han realizado sobre el libro de texto en sí mismo y sobre la repercusión de este en la educación. Howson (1995) distingue así, dos tipos de investigaciones, las investigaciones realizadas a posteriori y las realizadas a priori.

Entre las primeras, relativas a la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado, es preciso destacar el estudio de Pepin y Haggarty (2001) sobre el uso de libros de texto en Inglaterra, Francia y Alemania.

Entre las segundas, distinguir los trabajos de Chevallard (1991) y Kang y Kilpatrick (1992) sobre la transposición didáctica, relativa a las transformaciones entre el saber sabio y el saber enseñado, donde el libro de texto desarrolla un papel fundamental.

Destacar también otros tipos de investigaciones como las concernientes a aspectos del lenguaje y la legibilidad de los textos (Pimm 1987,1994), a la forma de presentación de los contenidos (Otte, 1986), a la comprensión lectora en el área de Matemáticas (Murray, 1988) y en el área de Ciencias Naturales (Santelices, 1990), a clasificaciones de elementos que resultan imprescindibles en un libro de texto de Matemáticas (Van Dormolen, 1986) y a las relaciones existentes en un libro de texto entre su texto escrito y el icónico (Jiménez y Perales, 2001), entre otras.

Son interesantes también aquellas investigaciones centradas en el análisis de la forma en que se reflejan los contenidos en los libros de texto, en el sentido de analizar para un tópico concreto, las diferentes formas en que este se presenta. Ejemplos de ello son, entre otros, el trabajo de Kuchemann (1989) que analiza como los conceptos de razón y proporción se encuentran caracterizados en distintos libros de texto, el estudio de Díaz y Morales (2005), que examinan la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes libros de texto, sus características y elementos que se utilizan para definirla, el trabajo de Contreras y Ordóñez (2003) relativo al concepto de integral definida, y el análisis de Azcárate y Serradó (2006) sobre el tratamiento del azar en libros de texto de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria.

Son también muy significativas las investigaciones sobre la evolución histórica del tratamiento de algunos conceptos matemáticos. Ejemplo de ello es el estudio histórico realizado por Machado (2009) sobre el concepto de número en libros de texto españoles de Matemáticas de los siglos XVIII y XIX.

Resaltar también en este sentido los trabajos de Sierra, González y López sobre la evolución histórica del tratamiento del concepto del límite funcional en los libros de texto (Sierra, González y López, 1999) y sobre la evolución de los conceptos de límite y continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX (Sierra, González y López, 2003). Además, el estudio de González (2002) sobre la evolución del concepto de punto crítico desde los libros de los siglos XVII y XVIII hasta el siglo XX.

Dentro de las investigaciones históricas sobre los libros de texto, no se puede dejar de referenciar el proyecto de investigación conocido como Proyecto MANES, iniciado en España en el año 1992, y cuyo principal objetivo fue realizar un estudio histórico de los manuales escolares españoles publicados desde 1808 a 1990, estudio de doble vertiente, una de carácter instrumental (histórico-documental) y otra de carácter investigadora (histórico-educativa) (Tiana, 2013).

Así, además del importante papel que desempeñan, se puede añadir que los libros de texto son una fuente de gran potencialidad en el contexto histórico educativo, ya que en ellos converge, entre otros, la historia del currículo, la historia de las disciplinas escolares y la historia de la práctica escolar (de Puelles, 2013). Entre los investigadores en educación matemática en torno al libro de texto, destacar a Schubring (1987), quien considera que el análisis de textos antiguos permite extraer, entre otros, información sobre la difusión y evolución de los saberes de una época determinada.

1.3. Selección, organización y secuenciación de contenidos

Dentro de los cuatro componentes generales del currículo, los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación, y teniendo en cuenta que el eje vertebrador de estos cuatro elementos son las competencias, condicionantes, a su vez de los cuatro componentes, los contenidos son, sin duda, respetando la importancia de cada elemento, un componente primordial.

Debido a la importancia de este componente, es preciso profundizar en tres procesos relacionados con el mismo y de gran trascendencia para la planificación de la enseñanza y el proceso de aprendizaje. Estos son: la selección, la organización y la secuenciación de los contenidos objetos de enseñanza.

Por ello, se estudia a continuación cómo se tratan estos tres procesos y cuáles son sus consecuencias, tanto en la normativa educativa correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria como en concreciones curriculares de la misma. Con motivo de la contextualización de esta investigación, el estudio se centra en el área de Matemáticas y en los libros de texto de esta etapa educativa.

Selección, organización y secuenciación de contenidos matemáticos en la normativa educativa de Educación Secundaria Obligatoria

La normativa educativa considerada (véase apartado 1.1. Normativa educativa de la Educación Secundaria Obligatoria) únicamente establece los contenidos mínimos a tener en cuenta y los organiza a nivel de etapa, ciclo, curso, materia y bloque de contenido.

Partiendo de que la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria comprende cuatro cursos académicos (primero, segundo, tercero y cuarto), se detalla a continuación y de forma precisa la organización que han establecido cada una de las leyes orgánicas consideradas.

La LOGSE estructura los cursos académicos en dos ciclos de dos cursos cada uno, siendo el primer ciclo el formado por los cursos primero y segundo, y el segundo ciclo el formado por los cursos tercero y cuarto. Si bien la LOE no detalla estructuración de los cursos de esta etapa en ciclos, la LOMCE sí lo hace, modificando la constitución de los mismos y considerando el primer ciclo el formado por los cursos primero, segundo y tercero y el segundo ciclo el formado únicamente por el cuarto curso. Una información más precisa al respecto se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Ciclos en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria (LOGSE, LOE y LOMCE)

LOGSE	Capítulo III, sección primera, artículo 20. *1. La Educación Secundaria Obligatoria constará de dos ciclos, de dos cursos cada uno, […].*
LOE	Si bien no especifica una organización de los cuatro cursos en ciclos, trata en su Artículo 24 la organización conjunta de los tres primeros cursos, y de forma independiente, en su Artículo 25, la del cuarto curso.
LOMCE	Artículo único.14 *Se añade un artículo 23 bis con la siguiente redacción:* *Artículo 23 bis. Ciclos de Educación Secundaria Obligatoria.* *La etapa de Educación Secundaria Obligatoria se organiza en materias y comprende dos ciclos, el primero de tres cursos escolares y el segundo de uno.* *El segundo ciclo o cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria tendrá un carácter fundamentalmente propedéutico.*

Fuente: LOGSE, LOE y LOMCE

Además, cada uno de los cuatro cursos académicos que constituyen la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, se organiza en diferentes áreas de conocimiento y/o materias. En la Tabla 2 puede verse detalladamente la organización que las leyes orgánicas LOGSE, LOE y LOMCE han establecido para los mismos. Obsérvese como la organización de la LOGSE se basa en áreas de conocimiento, mientras que la LOE y la LOMCE lo hacen en materias.

Tabla 2. Organización de los cursos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (LOGSE, LOE y LOMCE)

LOGSE	Capítulo III, sección primera, artículo 20. *2. Serán áreas de conocimiento obligatorias en esta etapa las siguientes:* *a) Ciencias de la Naturaleza.* *b) Ciencias Sociales, Geografía e Historia.* *c) Educación Física.* *d) Educación Plástica y Visual.* *e) Lengua castellana, lengua oficial propia de la correspondiente Comunidad Autónoma y Literatura.* *f) Lenguas extranjeras.* *g) Matemáticas.* *h) Música.* *i) Tecnología.* *3. En la fijación de las enseñanzas mínimas del segundo ciclo, especialmente en el último curso, podrá establecerse la optatividad de alguna de estas áreas, así como su organización en materias.*
LOE	Art*ículo 24. Organización de los cursos primero, segundo y tercero.* *1. Las materias de los cursos primero a tercero de la etapa serán las siguientes:* *Ciencias de la naturaleza.* *Educación física.* *Ciencias sociales, geografía e historia.* *Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.* *Lengua extranjera.* *Matemáticas.* *Educación plástica y visual.* *Música.* *Tecnologías.* *2. Además, en cada uno de los cursos todos los alumnos cursarán las materias siguientes:* *Ciencias de la naturaleza.* *Educación física.* *Ciencias sociales, geografía e historia.* *Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.* *Lengua extranjera.* *Matemáticas.* *[…]* *Artículo 25. Organización del cuarto curso.* *1. Todos los alumnos deberán cursar en el cuarto curso las materias siguientes:* *Educación física.* *Educación ético-cívica.* *Ciencias sociales, geografía e historia.* *Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.*

	Matemáticas. *Primera lengua extranjera.* *2. Además de las materias enumeradas en el apartado anterior, los alumnos deberán cursar tres materias de las siguientes:* *Biología y geología.* *Educación plástica y visual.* *Física y química.* *Informática.* *Latín.* *Música.* *Segunda lengua extranjera.* *Tecnología.* *[…]*
LOMCE	*Artículo único.15* *El artículo 24 queda redactado de la siguiente manera:* *Artículo 24. Organización del primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.* *1. Los alumnos y alumnas deben cursar las siguientes materias generales del bloque de asignaturas troncales en los cursos primero y segundo:* *a) Biología y Geología en primer curso.* *b) Física y Química en segundo curso.* *c) Geografía e Historia en ambos cursos.* *d) Lengua Castellana y Literatura en ambos cursos.* *e) Matemáticas en ambos cursos.* *f) Primera Lengua Extranjera en ambos cursos.* *2. Los alumnos y alumnas deben cursar las siguientes materias generales del bloque de asignaturas troncales en el curso tercero:* *a) Biología y Geología.* *b) Física y Química.* *c) Geografía e Historia.* *d) Lengua Castellana y Literatura.* *e) Primera Lengua Extranjera.* *3. Como materia de opción, en el bloque de asignaturas troncales deberán cursar, bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, o bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, a elección de los padres, madres o tutores legales o, en su caso, de los alumnos y alumnas.* *[…]* *Artículo 1.16* *El artículo 25 queda redactado de la siguiente manera:* *Artículo 25. Organización de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria.* *1. Los padres, madres o tutores legales o, en su caso, los alumnos y alumnas podrán escoger cursar el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria por una de las dos siguientes*

	opciones: *a) Opción de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato.* *b) Opción de enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional.* *A estos efectos, no serán vinculantes las opciones cursadas en tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.* *2. En la opción de enseñanzas académicas, los alumnos y alumnas deben cursar las siguientes materias generales del bloque de asignaturas troncales:* *a) Geografía e Historia.* *b) Lengua Castellana y Literatura.* *c) Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.* *d) Primera Lengua Extranjera.* *[…]* *4. En la opción de enseñanzas aplicadas, los alumnos y alumnas deben cursar las siguientes materias generales del bloque de asignaturas troncales:* *a) Geografía e Historia.* *b) Lengua Castellana y Literatura.* *c) Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.* *d) Primera Lengua Extranjera.* *[…]*

Fuente: LOGSE, LOE y LOMCE

Atendiendo al área de conocimiento o materia de Matemáticas, puede observarse como esta es contemplada por las tres leyes orgánicas en cada uno de los cursos académicos.

Respecto al cuarto curso y, teniendo en cuenta los dos posibles fines de esta etapa educativa, el Real Decreto 1631/2006 (derivado de la LOE) en su artículo 5.3 determina, en relación a la organización de esta materia que:

Las administraciones educativas podrán disponer que la materia de Matemáticas se organice en dos opciones en función del carácter terminal o propedéutico que dicha materia tenga para cada alumno.

y concretamente en el artículo 8.2 del mismo real decreto se establece:

En el caso de que la administración educativa no haga uso de la facultad establecida en el artículo 5.3, los contenidos y criterios de evaluación de las enseñanzas mínimas de la materia *de Matemáticas correspondientes al cuarto curso, serán los que recoge el Anexo II como Matemáticas B.*

Con ello, en cuarto curso se ofrecen dos materias para el área de Matemáticas, acordadas en denominarse Matemáticas A y Matemáticas B, de forma que sus currículos están determinados en base a un carácter terminal, en el caso de Matemáticas A, y un carácter propedéutico, en el caso de Matemáticas B.

Debido a esta doble opción de organización de la materia de Matemáticas en el cuarto curso de la etapa y, en base a lo dispuesto en el artículo 8.2 del Real Decreto 1631/2006, la presente investigación considera el currículo establecido para la materia de Matemáticas B en lo relativo a esta materia del cuarto curso de la etapa, poniendo así el foco tanto en los aspectos teóricos como en las aplicaciones prácticas de los mismos.

Esta doble posibilidad se traduce en la LOMCE desde el tercer curso en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, con fines de iniciación a la Formación Profesional y al Bachillerato, respectivamente.

Concretamente, el Real Decreto 1105/2014 establece en su artículo 13, relativo a la Organización del primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, que se deberá cursar como materia de opción en tercer curso, en el bloque de asignaturas troncales, bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas o bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Además, en su artículo 14, relativo a la Organización de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, establece que se puede elegir cursar cuarto curso por una de entre las opciones de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato y enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional.

La especificación de los aspectos básicos del currículo se dispone para cada una de las materias y, en concreto, para Matemáticas, en los anexos de los reales decretos en los que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, derivadas de las leyes orgánicas educativas (véase apartado 1.1. Normativa educativa de la Educación Secundaria Obligatoria).

Respecto al currículo de Matemáticas determinado por la LOGSE, es preciso destacar que los contenidos en el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, se estructuran en cinco partes correspondientes a *Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización*, *Medida,* *estimación y cálculo de magnitudes*, *Representación y organización en el espacio*, *Interpretación, representación y tratamiento de la información* y *Tratamiento del azar*. Además, los contenidos de cada una de estas cinco partes se organizan acorde a conceptos, procedimientos y actitudes, no apareciendo contemplada, sin embargo, una división de los mismos por curso académico. Un listado de los contenidos así organizados puede verse en la Tabla 3.

Tabla 3. Contenidos de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1007/1991 (LOGSE)

1. Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización

Conceptos
1. Significado uso y notación de los números naturales, enteros, decimales y fraccionarios.
2. Significado y uso de las operaciones con los diferentes tipos de números.
3. Proporcionalidad de magnitudes. Porcentajes.
4. Margen de error en la aproximación de cantidades.
5. Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones.

Procedimientos
1. Interpretación y utilización de los números, las operaciones y el lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
2. Transformación y aproximación de números de acuerdo con las necesidades impuestas por su uso.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales de estimación de cantidades y cálculo mental.
4. Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con números enteros, decimales y tracciones sencillas.
5. Utilización de diferentes procedimientos para efectuar cálculos de proporcionalidad.
6. Utilización de la calculadora para la realización de cálculos numéricos y decisión sobre la conveniencia de su uso.
7. Resolución de ecuaciones de primer grado por transformación algebraica y de otras ecuaciones por métodos numéricos y gráficos.
8. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números.
9. Formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas.
10. Utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos.

Actitudes
1. Incorporación del lenguaje numérico del cálculo y de la estimación a la forma de proceder habitual.
2. Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora y otros instrumentos para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.
3. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones.
4. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o problema numérico.
5. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos.

2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes

Conceptos
1. Medición de magnitudes. Unidades de medida.
2. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal.
3. Fórmulas para el cálculo de longitudes, perímetros y volúmenes en figuras y cuerpos geométricos.

Procedimientos
1. Expresión de la medida de los objetos con la terminología y precisión adecuadas.
2. Medida de longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras utilizando fórmulas y otras técnicas.

3. Acotación de los errores cometidos al estimar, medir o aproximar una magnitud.
4. Estimación de la medida de objetos, tiempos y distancias.

Actitudes
1. Disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medidas de objetos, espacios y tiempos cuando la situación lo aconseje.
2. Revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se adecúen o no a los valores esperados.
3. Cuidado y precisión en el uso de los diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.

3. Representación y organización en el espacio

Conceptos
1. Elementos y relaciones básicos para la descripción y organización del plano y el espacio.
2. Figuras y cuerpos geométricos: Elementos característicos y relaciones entre ellos.
3. Semejanza de figuras.
4. Translaciones, giros y simetrías.

Procedimientos
1. Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
2. Construcción y utilización de modelos geométricos, esquemas, mapas y planas.
3. Identificación de la semejanza entre figuras y cuerpos geométricos y obtención del factor de escala.
4. Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
5. Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
6. Utilización de la composición, descomposición, intersección, movimiento, deformación y desarrollo de figuras, cuerpos y configuraciones geométricas para analizarlos u obtener otros.
7. Reducción de problemas complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.

Actitudes
1. Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas.
2. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
3. Sensibilidad ante las cualidades estéticas de las configuraciones geométricas.
4. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda y mejora de soluciones a los problemas.
5. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas a las propias.

4. Interpretación, representación y tratamiento de la información

Conceptos
1. Características globales de las gráficas: continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad, tendencia.
2. Fenómenos y gráficos lineales, cuadráticos, exponenciales y periódicos.
3. Tratamiento de datos estadísticos: parámetros centrales y de dispersión.

Procedimientos
1. Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
2. Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas en casos sencillos.
3. Elección y cálculo de los parámetros más adecuados para describir una distribución.
4. Detección de errores en la utilización del lenguaje gráfico y estadístico.
5. Obtención de datos de forma individual y colectiva utilizando diversas fuentes y recursos.
6. Interpretación de los datos relativos a una muestra estadística teniendo en cuenta su representatividad.

Actitudes
1. Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en el tratamiento y representación gráfica de informaciones.
2. Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos.
3. Sensibilidad, interés y valoración crítica del uso de los lenguajes de naturaleza matemática (gráfico,

estadístico, etc.) en informaciones y argumentaciones.
5. Tratamiento del azar
Conceptos *1. Fenómenos aleatorios. Frecuencia relativa y probabilidad.* *2. Probabilidad condicionada.* **Procedimientos** *1. Utilización de distintas informaciones y técnicas para la asignación de probabilidades.* *2. Cálculo de probabilidades en casos sencillos con la ley de Laplace.* *3. Detección de los errores habituales en la interpretación del azar.* *4. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de los fenómenos aleatorios sencillos.* *5. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en distintas situaciones.* **Actitudes** *1. Disposición favorable para investigar fenómenos de azar y a tener en cuenta la probabilidad en la toma de decisiones.* *2. Cautela y sentido crítico ante las creencias e informaciones sobre los fenómenos aleatorios y la probabilidad.*

Fuente: anexo I del Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Sin embargo, los contenidos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria se organizan, acorde al Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre que modifica al Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, en cursos académicos, no considerando ya una clasificación de los mismos en conceptos, procedimientos y actitudes, sino un tratamiento de carácter global como propios contenidos. En las Tablas 4, 5, 6 y 7 puede observarse[1] tal organización para los cursos primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente.

Tabla 4. Contenidos del primer curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 3473/2000 (LOGSE)

PRIMER CURSO
1. Aritmética y álgebra
Números naturales. El sistema de numeración decimal. Divisibilidad. Fracciones y decimales. Operaciones elementales. Redondeos. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas exactas. Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal. El euro. Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes.
2. Geometría
Elementos básicos de la geometría del plano. Descripción, construcción, clasificación y propiedades características de las figuras planas elementales. Cálculo de áreas y perímetros de las figuras planas

[1] La redacción sería más fluida escribiendo Tablas 4-7, pero se tiene la ventaja de que los números son hipervínculos a las tablas correspondientes. Lo mismo ocurrirá a lo largo del texto con “Figuras”.

elementales.
3. Tablas y gráficas
Construcción e interpretación de tablas de valores. Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.

Fuente: anexo I del Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 5. Contenidos del segundo curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 3473/2000 (LOGSE)

SEGUNDO CURSO
1. Aritmética y álgebra
Relación de divisibilidad. M.C.D. y m.c.m. de dos números naturales. Operaciones elementales con fracciones, decimales y números enteros. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Raíces cuadradas aproximadas. Medida del tiempo y los ángulos. Precisión y estimación en las medidas. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Porcentajes. Interpretación de fórmulas y expresiones algebraicas. Ecuaciones de primer grado.
2. Geometría
Elementos básicos de la geometría del espacio. Descripción y propiedades características de los cuerpos geométricos elementales. Cálculo de áreas y volúmenes. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza. Teorema de Tales. Razón de semejanza. Escalas.
3. Funciones y gráficas
Coordenadas cartesianas. Tablas de valores y gráficas cartesianas. Relaciones funcionales entre magnitudes directamente proporcionales. Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.
4. Estadística
Estadística unidimensional. Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias y diagramas de barras. Media aritmética y moda.

Fuente: anexo I del Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 6. Contenidos del tercer curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 3473/2000 (LOGSE)

TERCER CURSO
1. Aritmética y álgebra
Números racionales. Operaciones elementales y potencias de exponente entero. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis. Aproximaciones y errores. Reconocimiento de números irracionales. Sucesiones numéricas. Iniciación a las progresiones aritméticas y geométricas. Polinomios. Operaciones elementales. Identidades notables. Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y sistemas de dos

ecuaciones lineales con dos incógnitas. Ecuación de segundo grado.
2. Geometría
Descripción y propiedades elementales de las figuras planas y los cuerpos elementales. Cálculo de áreas y volúmenes. Poliedros regulares. La esfera. El globo terráqueo. Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
3. Funciones y gráficas
Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función. Estudio gráfico de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad. Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines. Interpretación y lectura de gráficas en problemas relacionados con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.
4. Estadística y probabilidad
Estadística unidimensional. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos. Parámetros de centralización y dispersión. Experimentos aleatorios. Frecuencia y probabilidad de un suceso. Cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace.

Fuente: anexo I del Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 7. Contenidos del cuarto curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 3473/2000 (LOGSE)

CUARTO CURSO
1. Aritmética y álgebra
Iniciación al número real. La recta real. Notación científica. Operaciones en notación científica. Potencias de exponente fraccionario y radicales. Repaso y profundización en el cálculo algebraico: operaciones con polinomios. Ecuaciones de primer y segundo grado. Sistemas de ecuaciones lineales.
2. Geometría
Figuras semejantes. Razón de semejanza. Teorema de Tales. Razones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos. Iniciación a la geometría analítica plana.
3. Funciones y gráficas
Funciones. Estudio gráfico de una función. Características globales de las gráficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad. Estudio de las funciones polinómicas de primer y segundo grado y de las funciones exponenciales y de proporcionalidad inversa sencillas. Interpretación y lectura de gráficas en problemas relacionados con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.
4. Estadística y probabilidad
Variables discretas y continuas. Intervalos y marcas de clases. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias, gráficos de barras y de sectores, histogramas y polígonos de frecuencia. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y dispersión. Experimentos aleatorios y sucesos. Probabilidad simple y compuesta. Utilización de distintas técnicas combinatorias en la asignación de probabilidades simples y compuestas.

Fuente: anexo I del Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Obsérvese que la organización de contenidos que establece el Real Decreto 3473/2000, es diferente de la dispuesta en su anterior Real Decreto 1007/1991, además, aunque solo ligeramente, las partes determinadas en cada uno de los cursos son diferentes. Así, para el primer curso se consideran *Aritmética y álgebra*, *Geometría* y *Tablas y gráficas*, mientras que para segundo curso se mantienen las dos primeras partes, sustituyendo la tercera de *Tablas y gráficas* por *Funciones y gráficas*, y añadiendo una cuarta parte correspondiente a *Estadística*. Para tercer y cuarto curso se mantienen, sin embargo, las tres primeras partes establecidas para el segundo curso, añadiendo a la última relativa a *Estadística*, la *Probabilidad*.

Es en el Real Decreto 1631/2006 derivado de la LOE donde, además de una organización de los contenidos por curso académico y por diferentes partes, se le da el nombre de bloque a las mismas. En las Tablas 8, 9, 10 y 11 pueden verse detallados los contenidos así organizados para los cursos de primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente.

Tabla 8. Contenidos del primer curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1631/2006 (LOE)

PRIMER CURSO
Bloque 1. Contenidos comunes
Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida. *Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas.* *Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales.* *Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.* *Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.* *Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.*
Bloque 2. Números
Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Aplicaciones de la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas. *Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales.* *Significado y usos de las operaciones con números enteros. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos sencillos.* *Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.*

Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. *Elaboración y utilización de estrategias personales para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y con calculadoras.* *Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa.* *Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales.*
Bloque 3. Álgebra
Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. *Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.* *Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.* *Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.*
Bloque 4. Geometría
Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. *Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz.* *Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos.* *Polígonos regulares. La circunferencia y el círculo.* *Construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales.* *Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.* *Estimación y cálculo de perímetros de figuras. Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación.* *Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.* *Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.*
Bloque 5. Funciones y gráficas
Organización de datos en tablas de valores. *Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.* *Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.* *Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.* *Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica.*

Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.
Bloque 6. Estadística y probabilidad
Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. *Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas.* *Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas.* *Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.*

Fuente: anexo II del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 9. Contenidos del segundo curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1631/2006 (LOE)

SEGUNDO CURSO
Bloque 1. Contenidos comunes
Utilización de estrategias y técnicas en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la división del problema en partes, y comprobación de la solución obtenida. *Descripción verbal de procedimientos de resolución de problemas utilizando términos adecuados.* *Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales.* *Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.* *Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.* *Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.*
Bloque 2. Números
Potencias de números enteros con exponente natural. Operaciones con potencias. Utilización de la notación científica para representar números grandes. *Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas.* *Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes.* *Utilización de la forma de cálculo mental, escrito o con calculadora, y de la estrategia para contar o estimar cantidades más apropiadas a la precisión exigida en el resultado y la naturaleza de los datos.* *Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad.* *Aumentos y disminuciones porcentuales.* *Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.*

Bloque 3. Álgebra
El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. *Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.* *Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.* *Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución.* *Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.*
Bloque 4. Geometría
Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. *Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes.* *Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.* *Poliedros y cuerpos de revolución. Desarrollos planos y elementos característicos. Clasificación atendiendo a distintos criterios. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.* *Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.* *Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.*
Bloque 5. Funciones y gráficas
Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. *Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.* *Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.* *Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.* *Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.* *Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.*
Bloque 6. Estadística y probabilidad
Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas. Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas. *Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.* *Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.*

Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones. *Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.*

Fuente: anexo II del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 10. Contenidos del tercer curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1631/2006 (LOE)

TERCER CURSO
Bloque 1. Contenidos comunes
Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada. *Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa.* *Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales.* *Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.* *Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.* *Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.*
Bloque 2. Números
Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. *Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada.* *Potencias de exponente entero. Significado y uso. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.* *Representación en la recta numérica. Comparación de números racionales.*
Bloque 3. Álgebra
Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas. *Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.* *Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.* *Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.* *Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables.* *Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones*

lineales con dos incógnitas. *Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.*
Bloque 4. Geometría
Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico. *Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.* *Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.* *Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.* *Planos de simetría en los poliedros.* *Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.* *Coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.* *Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.*
Bloque 5. Funciones y gráficas
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. *Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.* *Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.* *Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.* *Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.* *Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.*
Bloque 6. Estadística y probabilidad
Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. *Atributos y variables discretas y continuas.* *Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias.* *Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.* *Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones.* *Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.* *Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.* *Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.* *Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y*

cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.
Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.

Fuente: anexo II del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 11. Contenidos del cuarto curso de la materia de Matemáticas (opciones A y B) en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1631/2006 (LOE)

CUARTO CURSO Opción A
Bloque 1. Contenidos comunes
Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización.   *Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación.*   *Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones o informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales.*   *Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.*   *Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.*   *Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.*
Bloque 2. Números
Interpretación y utilización de los números y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.   *Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.*   *Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.*   *Uso de la hoja de cálculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros.*   *Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo.*   *Representación de números en la recta numérica.*
Bloque 3. Álgebra
Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.   *Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de*

otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. *Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.*
Bloque 4. Geometría
Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. *Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.*
Bloque 5. Funciones y gráficas
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. *La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.* *Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.*
Bloque 6. Estadística y probabilidad
Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumnado. *Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.* *Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo.* *Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.* *Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.* *Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.*
CUARTO CURSO Opción B
Bloque 1. Contenidos comunes
Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización. *Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación.* *Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones o informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales.* *Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.* *Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.* *Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.*
Bloque 2. Números
Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. *Representación de números en la recta real. Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un*

intervalo. *Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.* *Expresión de raíces en forma de potencia. Radicales equivalentes. Comparación y simplificación de radicales.* *Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones para realizar cálculos con potencias de exponente entero y fraccionario y radicales sencillos.* *Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica. Cálculos aproximados. Reconocimiento de situaciones que requieran la expresión de resultados en forma radical.*
Bloque 3. Álgebra
Manejo de expresiones literales. Utilización de igualdades notables. *Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.* *Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.* *Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.*
Bloque 4. Geometría
Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. *Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.* *Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.* *Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.*
Bloque 5. Funciones y gráficas
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. *La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.* *Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.* *Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.*
Bloque 6. Estadística y probabilidad
Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. *Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.* *Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.* *Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.* *Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de*

casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.
Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

Fuente: anexo II del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Obsérvese como la organización en bloques que establece el Real Decreto 1631/2006, además de diferir en nombre y número de la proporcionada por el Real Decreto 3473/2000 derivado de la LOGSE, es común a los cuatro cursos académicos, considerando un bloque de *Contenidos comunes*, relativo a la resolución de problemas, y otros cinco que responden a *Números*, *Álgebra*, *Geometría*, *Funciones y gráficas* y *Estadística y probabilidad*.

Téngase en cuenta además, como en el cuarto curso de la etapa ya se especifican los contenidos correspondientes a las dos opciones que se ofrecen, Matemáticas A, de carácter terminal y Matemáticas B, de carácter propedéutico.

El Real Decreto 1105/2014, derivado de la LOMCE, establece en relación al currículo de Matemáticas para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria la organización que se muestra en las Tablas 12, 13, 14, 15 y 16, correspondientes a los cursos primero, segundo, tercero y cuarto de esta etapa.

Tabla 12. Contenidos del primer y segundo curso de la materia de Matemáticas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1105/2014 (LOMCE)

PRIMER Y SEGUNDO CURSO
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Planificación del proceso de resolución de problemas. *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.* *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.* *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.* *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.* *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.*

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: *a) la recogida ordenada y la organización de datos;* *b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos;* *c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;* *d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas;* *e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos;* *f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*
Bloque 2. Números y álgebra
Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. *Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.* *Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.* *Números negativos. Significado y utilización en contextos reales.* *Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora.* *Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.* *Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.* *Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones.* *Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.* *Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones. Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes.* *Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas.* *Jerarquía de las operaciones.* *Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.* *Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.* *Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.* *Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos.* *Iniciación al lenguaje algebraico.* *Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.* *El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.* *Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.*

Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas. *Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.*
Bloque 3. Geometría
Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. *Ángulos y sus relaciones.* *Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades.* *Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.* *Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.* *Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.* *Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.* *Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.* *Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.* *Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.* *Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes.* *Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.* *Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*
Bloque 4. Funciones
Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. *El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.* *Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.* *Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.*
Bloque 5. Estadística y probabilidad
Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas. *Variables cualitativas y cuantitativas.* *Frecuencias absolutas y relativas.* *Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.* *Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.* *Medidas de tendencia central.* *Medidas de dispersión.*

Fenómenos deterministas y aleatorios. *Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.* *Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.* *Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.* *Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.* *Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.*

Fuente: anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Tabla 13. Contenidos del tercer curso de la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1105/2014 (LOMCE)

TERCER CURSO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Planificación del proceso de resolución de problemas. *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.* *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.* *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.* *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.* *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.* *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:* *a) la recogida ordenada y la organización de datos.* *b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.* *c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.* *d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.* *e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.* *f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*

Bloque 2. Números y álgebra
Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso. *Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica.* *Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones.* *Jerarquía de operaciones.* *Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.* *Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.* *Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.* *Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes Progresiones aritméticas y geométricas.* *Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).* *Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.* *Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.* *Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.*
Bloque 3. Geometría
Geometría del plano. *Lugar geométrico.* *Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.* *Traslaciones, giros y simetrías en el plano.* *Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.* *La esfera. Intersecciones de planos y esferas.* *El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.* *Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*
Bloque 4. Funciones
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. *Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.* *Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.* *Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.* *Expresiones de la ecuación de la recta.* *Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.*

Bloque 5. Estadística y probabilidad
Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas. *Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra.* *Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos.* *Gráficas estadísticas.* *Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades.* *Parámetros de dispersión.* *Diagrama de caja y bigotes.* *Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.* *Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.* *Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número.* *Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.*

Fuente: anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Tabla 14. Contenidos del tercer curso de la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1105/2014 (LOMCE)

TERCER CURSO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Planificación del proceso de resolución de problemas: *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.* *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.* *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.* *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.* *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.* *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:* *a) la recogida ordenada y la organización de datos.* *b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.* *c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo*

numérico, algebraico o estadístico. *d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.* *e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.* *f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*
Bloque 2. Números y álgebra
Potencias de números naturales con exponente entero. Significado y uso. Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. *Jerarquía de operaciones.* *Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos.* *Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Error cometido.* *Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.* *Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.* *Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Igualdades notables.* *Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.* *Resolución (método algebraico y gráfico). Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.*
Bloque 3. Geometría
Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades. *Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.* *Traslaciones, giros y simetrías en el plano.* *Geometría del espacio: áreas y volúmenes.* *El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.*
Bloque 4. Funciones
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. *Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.* *Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.* *Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.* *Expresiones de la ecuación de la recta* *Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.*

Bloque 5. Estadística y probabilidad
Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas. *Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra.* *Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos.* *Gráficas estadísticas.* *Parámetros de posición: media, moda, mediana y cuartiles. Cálculo, interpretación y propiedades.* *Parámetros de dispersión: rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.* *Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.*

Fuente: anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Tabla 15. Contenidos del cuarto curso de la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1105/2014 (LOMCE)

CUARTO CURSO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Planificación del proceso de resolución de problemas. *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.* *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.* *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.* *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.* *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.* *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:* *a) la recogida ordenada y la organización de datos.* *b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.* *c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.* *d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.* *e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.* *f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*

Bloque 2. Números y álgebra
Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. *Representación de números en la recta real. Intervalos.* *Potencias de exponente entero o fraccionario y radicales sencillos.* *Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.* *Potencias de exponente racional. Operaciones y propiedades. Jerarquía de operaciones.* *Cálculo con porcentajes. Interés simple y compuesto.* *Logaritmos. Definición y propiedades.* *Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables.* *Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización.* *Ecuaciones de grado superior a dos.* *Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones.* *Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.* *Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas.*
Bloque 3. Geometría
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. *Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.* *Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.* *Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.* *Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.* *Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.*
Bloque 4. Funciones
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. *La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.* *Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.*
Bloque 5. Estadística y probabilidad
Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. *Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.* *Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes.* *Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.* *Probabilidad condicionada.* *Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la*

estadística.   *Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.*   *Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.*   *Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.*   *Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.*   *Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.*

Fuente: anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Tabla 16. Contenidos del cuarto curso de la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria establecidos por el Real Decreto 1105/2014 (LOMCE)

CUARTO CURSO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Planificación del proceso de resolución de problemas.   *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.*   *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda otras formas de resolución, etc.*   *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.*   *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*   *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.*   *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:*   *a) la recogida ordenada y la organización de datos.*   *b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.*   *c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.*   *d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.*   *e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.*   *f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*
Bloque 2. Números y álgebra
Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.

Diferenciación de números racionales e irracionales. Expresión decimal y representación en la recta real. *Jerarquía de las operaciones.* *Interpretación y utilización de los números reales y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.* *Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica. Cálculos aproximados.* *Intervalos. Significado y diferentes formas de expresión.* *Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.* *Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.* *Polinomios: raíces y factorización. Utilización de identidades notables.* *Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.* *Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.*
Bloque 3. Geometría
Figuras semejantes. *Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas.* *Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.* *Resolución de problemas geométricos en el mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de diferentes cuerpos.* *Uso de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.*
Bloque 4. Funciones
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. *Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.* *La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.*
Bloque 5. Estadística y probabilidad
Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. *Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión.* *Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.* *Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.* *Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.* *Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.* *Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.*

Fuente: anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Obsérvese como la organización de los contenidos de la materia de Matemáticas en bloques de contenido es común a los cuatro cursos, independientemente de su orientación aplicada o académica. Así, se establecen los bloques de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, *Números y álgebra*, *Geometría*, *Funciones* y *Estadística y probabilidad*.

Según el propio Real Decreto 1105/2014 el bloque de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* es un bloque transversal y común a toda la etapa. Así, articulado en la resolución de problemas, los proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos, debe desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenido.

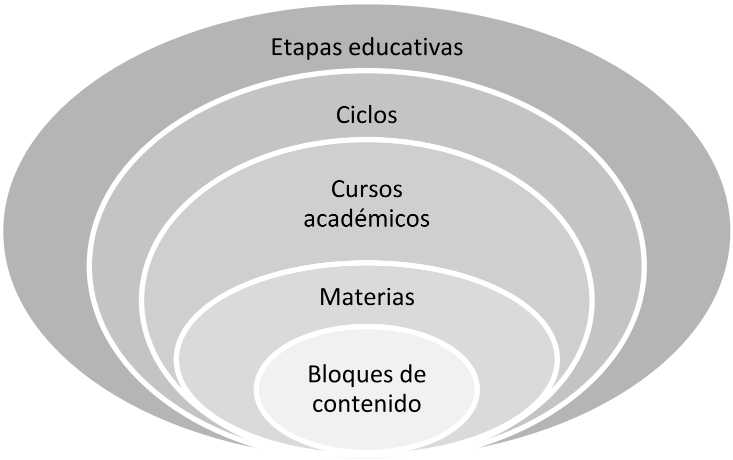
Comparando la organización de contenidos matemáticos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria establecida por la LOE, y su modificación con la LOMCE, cabe destacar que además de la doble opción académica o aplicada que dispone la LOMCE ya para la materia de Matemáticas del tercer curso, su organización en bloques de contenido no varía en demasía.

Las únicas diferencias son que el bloque de *Contenidos comunes* establecido por la LOE se ha convertido en el bloque de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, que los bloques de *Números* y *Álgebra* se han unido en uno solo formando el bloque de *Números y álgebr*a, y que el bloque de *Funciones y gráficas* se ha convertido en el bloque de *Funciones*.

Una vez analizada la organización de los contenidos de la materia de Matemáticas de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, que establecen las diferentes leyes orgánicas educativas que contemplan esta etapa, se observa cómo, a pesar de las diferencias existentes, se mantiene, en cierto sentido, la estructura general de los mismos.

Así, con todo lo anterior, la normativa educativa establece en lo referente a la materia de Matemáticas de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, una organización de contenidos en ciclos, cursos académicos y bloques de contenido. La Figura 1 muestra un esquema de tal organización. Es preciso mencionar que la forma de organización de los contenidos del resto de las materias es similar a la aquí analizada para la materia de Matemáticas.

Figura 1. Esquema que representa la organización de contenidos establecida por la normativa educativa



Fuente: elaboración propia fundamentada en la normativa educativa consultada

Respecto a la agrupación de contenidos en bloques de contenido, la propia normativa advierte que esta se realiza simplemente con la finalidad de presentar los conocimientos de forma coherente y acorde a los principales ámbitos que comprende la materia, debiéndose entender, por tanto, únicamente como una posible forma de organización de contenidos.

La normativa advierte, también, la importancia de no tratar los bloques de contenido establecidos como compartimentos estancos, cerrados e independientes.

En relación a la secuenciación de contenidos, el único orden que establece la normativa educativa en relación a los contenidos de una determinada materia es a nivel de curso académico. Dentro de cada curso académico, nada se establece sobre la secuenciación de sus contenidos, ya que aunque organizados en bloques de contenido, y a pesar de la numeración que se asocia a los mismos, no se especifica el orden en que cada uno de ellos debe tratarse, y mucho menos, se determina una secuenciación de los contenidos que constituyen un mismo bloque de contenido.

Estos aspectos resultan fundamentales, ya que, aunque esta organización en bloques de contenido sea la que se indica en la normativa educativa, esta misma advierte que no debe considerarse como única, sino simplemente como orientadora, dando así libertad tanto en la organización, como en el orden de contenidos determinados por tal normativa.

Selección, organización y secuenciación de contenidos matemáticos en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria

Analizando el currículo normativo, a nivel tanto de etapa educativa como de curso académico, una de las carencias que este posee en relación a sus cuatro componentes principales, los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación, tal y como indica Rico (1997), es que este no ofrece criterios específicos para el tratamiento de los mismos.

Así, particularmente, y en relación a los contenidos, el currículo normativo no ofrece criterios para la selección, organización y secuenciación de estos. Sin embargo, la toma de decisiones en base a estos aspectos es de gran importancia en el desarrollo de concreciones curriculares (Zabalza, 2009), motivo por el que esta función parece derivarse a los creadores de las concreciones curriculares de la normativa educativa correspondiente.

En relación a la concreción curricular tratada anteriormente, el libro de texto, se observa cómo se tiene en cuenta en él la organización que la normativa educativa establece para la estructuración de sus contenidos.

Así, en los libros de texto derivados de la LOGSE para el área de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria, se aprecia una distribución en partes similar a la que la normativa establece (véase Tabla 17).

Tabla 17. Organización de contenidos del área de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria establecidos por la normativa de la LOGSE y libros de texto derivados de ella

Diferentes partes que establece el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, derivado de la LOGSE
1. Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización *2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes* *3. Representación y organización en el espacio* *4. Interpretación, representación y tratamiento de la información* *5. Tratamiento del azar*
Diferentes partes que establece el Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre, que modifica al Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, derivado de la LOGSE
1. Aritmética y álgebra *2. Geometría* *3. Tablas y gráficas*

Ejemplos de diferentes partes que establecen algunos libros de texto derivados de la normativa educativa de la LOGSE		
(1994) *Números y operaciones* *Geometría* *Tratamiento de la información*	(1996) *Números y operaciones* *Geometría* *Tratamiento de la información.* *Azar*	(1998) *Números* *Álgebra* *Geometría* *Funciones* *Estadística*
(2002) *Aritmética y álgebra* *Geometría* *Funciones y gráficas* *Estadística y probabilidad*	(2003) *Aritmética y álgebra* *Geometría* *Funciones y gráficas* *Estadística*	(2004) *Aritmética y álgebra* *Geometría* *Medida* *Estadística y gráficas*

Fuente: normativa educativa derivada de la LOGSE y libros de texto consultados

De la misma forma, para libros de texto derivados de la LOE, se aprecia una organización en bloques de contenido, similar a la que determina la propia normativa (véase Tabla 18).

Tabla 18. Organización de contenidos del área de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria establecidos por la normativa de la LOE y libros de texto derivados de ella

Diferentes bloques de contenido que establece el Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, derivado de la LOE		
1. Contenidos comunes *2. Números* *3. Álgebra* *4. Geometría* *5. Funciones y gráficas* *6. Estadística y probabilidad*		
Ejemplos de diferentes bloques de contenido que establecen diversos libros de texto derivados de la normativa educativa de la LOE		
(2006) *Números* *Álgebra* *Geometría* *Sucesiones y funciones* *Estadística y probabilidad*	(2008) *Aritmética y álgebra* *Geometría* *Funciones* *Estadística y probabilidad*	(2009) *Números* *Álgebra, funciones y estadística* *Geometría y medida*

Fuente: normativa educativa derivada de la LOE y libros de texto consultados

En lo referente a la denominación de estas agrupaciones de contenidos, la normativa educativa derivada de la LOE, se refiere a ellos como bloques de contenido. Existen, sin embargo, otros términos que designan el mismo tipo de agrupación, como son bloques didácticos, bloques curriculares, etc.

Dentro de esta organización de contenidos en bloques de contenido o similares, son concreciones curriculares, como los libros de texto, quienes establecen nuevas organizaciones de contenidos que concretan las anteriores. De hecho, según Rico (1997), es el libro de texto quien tradicionalmente ha estructurado a este nivel de organización. Las diferentes partes de este nivel suelen denominarse temas, unidades didácticas, etc.

Esta organización de contenidos desarrollada en los libros de texto mediante bloques de contenido y unidades didácticas, o agrupaciones similares, puede resultar sugerente para establecer una secuenciación de contenidos a seguir, bajo el criterio de orden de aparición de los contenidos en los libros de texto. En esta línea, Ballesta (1995) garantiza una correcta secuenciación de contenidos en los buenos libros de texto.

Este criterio, se ve aún más pronunciado en el libro de texto de formato papel, en que el seguimiento ordenado de sus páginas parece ser lo más adecuado. Una alternativa a ello la forman los libros de texto en formato digital, en los que la existencia de hipervínculos entre las diferentes partes del mismo, permite una secuenciación de contenidos no lineal, basada en criterios diferentes al orden de aparición de los mismos.

El empleo de una secuenciación lineal puede tener el inconveniente de inducir al alumno hacia el entendimiento de la matemática como una disciplina estática y terminada. El no presentar, en cierto sentido, la matemática como se ha ido creando a lo largo del tiempo, puede impedir la compresión de la verdadera razón de ser de tal campo de conocimiento, desembocando en una falta de comprensión y, con ello, en una tendencia a la memorización. Todo ello afecta, sin duda, a la construcción del conocimiento y a la asignación de significados adecuados por parte de los alumnos.

Además de este tipo de secuenciaciones que se establecen en concreciones curriculares de la normativa educativa, no hay que olvidar otros criterios de secuenciación, como aquellos que atienden de forma directa a la estructura interna de la disciplina, esto es, a la endoestructura de sus contenidos.

Con todo lo anterior, es importante tener presente en todo proceso de enseñanza escolar de una determinada disciplina, tanto las bases establecidas respecto a la selección, organización y secuenciación de contenidos en la normativa educativa como en concreciones curriculares de la misma tales como libros de texto.

Sin duda, los libros de texto, como concreción curricular, determinan y caracterizan en gran medida la forma de enseñanza y, con ello, el proceso de aprendizaje, por lo que resulta de gran importancia conocer tanto las directrices generales de este referente educativo como sus características particulares y realizar, conforme a ello, un uso adecuado del mismo.

En este sentido, es la planificación docente, la que, apoyada en concreciones curriculares como estas, desempeña un papel fundamental en la aproximación del currículo normativo a la práctica diaria en el aula. Así, tal y como afirman Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008):

> *La planificación, como competencia clave del profesor de Matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades.* (p.8)

En relación a ello, es preciso que el propio docente establezca criterios para seleccionar y organizar contenidos, focalizar prioridades y configurar itinerarios de aprendizaje (Gómez, 2007).

La presente investigación realiza interesantes aportaciones en este contexto, ofreciendo métodos de selección, organización y secuenciación de contenidos educativos. Tales aportaciones se aplican además a la disciplina matemática, considerando los contenidos propios de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria y atendiendo al carácter epistemológico y a la peculiar estructura interna de esta disciplina.

CAPÍTULO 2

ESPECIFICIDADES DE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DEL ESTUDIO

Dentro de las características propias de la matemática como disciplina científica cabe destacar su lenguaje, el tipo de razonamiento que en ella se emplea, su aplicabilidad y su estructura interna.

Como es bien sabido, hoy en día el lenguaje matemático es un lenguaje simbólico en el que los símbolos poseen un significado único y preciso. Este tipo de notación hace posible una comunicación matemática caracterizada por el rigor y la precisión, en contraste con la ambigüedad del lenguaje ordinario.

Sin embargo, la importancia del lenguaje matemático no solamente es fundamental para su estricta comunicación, sino que tal y como afirma Popper (1972), también lo es para la construcción de los objetos matemáticos y con ello, para su crecimiento y evolución.

Respecto a estos dos aspectos y desde el punto de vista didáctico, es preciso tener en cuenta la importancia de que los alumnos conozcan las consecuencias del uso de este lenguaje, al mismo tiempo que poco a poco y, acorde a su nivel madurativo, se les involucre en su comprensión y empleo.

Esto conduce, por otro lado, en el sentido de Popper (1972) a la necesidad de transmitir a los alumnos una percepción de la matemática como una disciplina viva y en continuo crecimiento. Santos (1996) describe este hecho advirtiendo que la matemática es “un cuerpo de conocimientos no terminados, una disciplina en constante expansión, tanto en resultados particulares como en métodos y principios generales" (p.14).

Ese crecimiento y evolución de la matemática, fruto del verdadero quehacer matemático, se fundamenta en un tipo de razonamiento inductivo. Godino y Batanero (2003) afirman en este sentido que “el proceso histórico de construcción de las matemáticas nos muestra la importancia del razonamiento empírico-inductivo que, en muchos casos, desempeña un papel mucho más activo en la elaboración de nuevos conceptos que el razonamiento deductivo” (p.23).

Es conveniente tener presente que, a pesar de la importancia en este contexto del razonamiento inductivo frente al deductivo, es este último el que se presenta en el aula con mayor asiduidad.

Este factor de reflexión, ligado al tipo de razonamiento y la consecuente evolución de la matemática, conlleva también la necesidad de presentar a los alumnos una matemática cercana a su realidad, donde la modelización y la resolución de problemas, jueguen un importante papel.

En este sentido, cuando se habla en el contexto educativo de conexiones matemáticas, normalmente se hace alusión a la aplicabilidad de las mismas en la vida diaria del alumno y a las necesarias conexiones entre la matemática y otros ámbitos de estudio.

Así, en uno de los documentos fundamentales relativo a la educación matemática, *Principles and Standards for School Mathematics*[2] (NCTM, 2000) del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), se indica que saber matemática es saber usarla y se mencionan cuatro grandes campos para los que la matemática es necesaria: para la vida, para la herencia cultural, para el trabajo y para la comunidad científica y técnica. Es bien conocido que, dentro de cada uno de estos amplios campos, existen infinidad de aplicaciones de la matemática.

[2] Documento traducido al castellano, *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2003) y editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

En la enseñanza de la matemática, es primordial que se transmita al alumno este tipo de relaciones entre esta disciplina y su aplicabilidad en la vida diaria, ya que ello influye, entre otros aspectos, en la motivación de este (Ortega, 2005) y, en consecuencia, muy positivamente en su proceso de aprendizaje.

Sin embargo, al margen de este tipo de conexiones, existen otros tipos en el ámbito educativo de elevado interés. Este tipo de conexiones es el que corresponde a posibles relaciones existentes entre contenidos propios de una misma materia.

Hay que tener presente que el aprendizaje de las ciencias, y particularmente el de la matemática, consiste, como indican Massa y Mulhall (1992), en aprender a establecer relaciones entre los significados de los diferentes conceptos que la constituyen.

En NCTM (2003) se detallan seis principios que describen las características particulares de una educación matemática de calidad: la igualdad, el currículo, la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación y la tecnología. En relación al principio curricular, se destaca la importancia de las conexiones entre contenidos, indicando que estas no solamente deben estar presentes en el currículo, sino también en las lecciones y en el material de enseñanza.

En relación al principio de aprendizaje, se destaca la persistencia en el tiempo del problema del aprender sin comprender (Skemp, 1976; Hiebert y Carpenter, 1992; Brownell, 2004) y relaciona la solución a este problema con la importancia de la realización de conexiones, destacando que estas son base de la comprensión y el pensamiento matemático y que gracias a ellas, los alumnos pueden construir nuevos conocimientos sobre los previamente adquiridos.

Este último aspecto está vinculado con el aprendizaje significativo, al que la propia normativa educativa hace referencia en el área de Matemáticas, advirtiendo que “para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee” (R.D.1631/2006, 2006, p.750).

En NCTM (2003) se afirma además que sin la existencia de conexiones, los alumnos se ven obligados a aprender y recordar demasiados conceptos matemáticos aislados. Sin embargo, con la realización de conexiones, ellos llegan a ser más conscientes de las relaciones existentes entre diversos temas matemáticos, acercándose al punto de vista de la matemática como un todo coherente e integrado.

Para que el alumnado consiga ese punto de vista, se afirma que, en los niveles medios, los alumnos descubren conexiones cuando se les guía con preguntas tales como:

> *[…] ¿qué te hizo pensar así? ¿por qué tiene eso sentido? ¿dónde hemos visto antes un problema como este? ¿cómo se relacionan estas ideas? ¿pensó alguien en esto de otra manera? ¿cómo se relaciona el trabajo de hoy con el que hicimos en las primeras unidades de estudio?.* (NCTM, 2003, p.278)

Se aconseja, con el mismo fin, trabajar con problemas integradores que sugieran conexiones en el sentido de analizar diferentes enfoques de un mismo problema que produzcan resultados equivalentes.

Este tipo de conexiones entre contenidos matemáticos, induce una estructura interna de la disciplina, que, al margen de las particularidades de las diferentes concepciones de la misma que han existido a lo largo de la historia, es destacable por la riqueza con la que se relaciona el conocimiento que la constituye.

No cabe duda que esa estructura lógica interna que caracteriza a la matemática, supone un condicionamiento en el proceso de planificación de su enseñanza, al que por su carácter constructivo y lejos de la aleatoriedad, cabe prestar especial atención.

Ello debe tenerse siempre presente y, entre otros, en los procesos de planificación de la enseñanza de la matemática ligados con la selección, la organización y la secuenciación de sus propios contenidos.

Respecto a la selección de esos contenidos y, atendiendo de nuevo a su estructura interna, es esta misma la que permite la identificación de aquellos contenidos básicos o claves sobre los que se construyen los demás o que, al menos, proporcionan puntos de referencia para la comprensión de otros.

La organización de esta disciplina basada en la fundamentación de unos contenidos en otros, proporciona, por otro lado, una gran riqueza de estructuración y abre la puerta a posibles organizaciones que no solamente ayudan en la planificación de la enseñanza, sino que inducen al respeto de su estructura y organización interna por parte del docente, desembocando a su vez, tal y como afirma Bruner (2003), en un respeto en el discente, contribuyendo, entre otros, a la apreciación por su parte de la propia razón de ser y a la comprensión del verdadero sentido de la disciplina.

Las conexiones internas en los sistemas de conceptos matemáticos los constituyen en estructuras; de este modo proporcionan referencia -valor veritativo- a cada noción, por medio de sus vínculos en la estructura conceptual en que se inserta. Un concepto adquiere objetividad y potencial argumentativo cuando forma parte de una estructura. (Rico et al., 2008, p.9)

La base de esos nexos matemáticos induce además un orden en la estructura interna de la disciplina. Es cierto que este orden obliga en ocasiones, tal y como manifiestan Godino y Batanero (2003), a trabajar en el aula ciertos contenidos únicamente con la finalidad de poder integrar otros que son los que se consideran verdaderamente importantes desde un punto de vista educativo. Sin embargo, no hay que olvidar la ventaja que supone a largo plazo para el alumno el respeto de un orden de secuenciación que le permita una comprensión significativa de sus contenidos y una apreciación global de la disciplina en la que trabaja.

Son estas especificidades de la matemática descritas, las que no solamente suponen un fundamento en el contexto del proceso de enseñanza, sino que permiten al alumno la percepción del verdadero sentido y la razón de ser de la matemática, la apreciación de la matemática como un conjunto de conocimientos con una estructura lógica, muy lejos de la arbitraria e injustificada lluvia de contenidos, carente de sentido para el alumno.

Todo ello influye notablemente en el alumno y debe tenerse en cuenta para lograr, en la medida de lo posible, una concepción acertada de la matemática, contribuyendo a la eliminación de pensamientos propios injustificados de los profanos en matemática.

Cuán lejos está el profano en matemática de entender lo que hace todo el día el matemático cuando lo considera inactivo porque el profano cree que la matemática se reduce a aquellas operaciones en las que solía naufragar en sus años de educación básica y media. Si solo eso fuera la matemática, más valdría que no existiera. (Campos, 2000, p.95)

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA EN EL CONTEXTO DEL ESTUDIO

Como es bien sabido, las diferentes teorías existentes sobre el proceso de aprendizaje, surgen del análisis del mismo desde distintas perspectivas, dando lugar así a una gran cantidad y variedad de teorías al respecto.

El contexto de la presente investigación lo constituyen aquellas teorías que facilitan la selección, la organización y la secuenciación de los contenidos objeto de enseñanza y que proponen a los docentes elementos que favorecen el aprendizaje de los mismos.

Es claro que los procesos de selección, organización y secuenciación de contenidos han sido siempre de gran importancia en el ámbito educativo. Sin embargo, en una sociedad de la información como la actual, en la que obtener información sobre cualquier aspecto es tarea más que sencilla y en la que el papel del docente ha dejado ser el de mero transmisor de conocimientos, parece que procesos como estos, cobran, si cabe, mayor importancia.

3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel

Es preciso destacar como base teórica del estudio el bien conocido cognitivismo (Pozo, 1989), para el que, de forma general, el aprendizaje es visto como reestructuraciones de la estructura cognitiva del aprendiz.

Dentro de una concepción cognitiva del aprendizaje, señalar en este marco la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (Ausubel, 1963; Ausubel, Novak y Hanesian, 1976; Moreira, 2000; Ausubel y Barberán, 2002) la cual respalda, como es sabido, el hecho de que la nueva información es significativa en la medida en que pueda ser relacionada con aquella que ya se conoce. Su concepción como teoría es clara, ya que, "aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo" (Rodríguez, 2008, p.8).

Así, para Ausubel el aprendizaje es sinónimo de comprensión, distinguiendo en base a ello un aprendizaje significativo de uno que no lo es, dependiendo de si lo aprendido se relaciona de forma sustancial o no con la estructura cognitiva del alumno.

Con ello, son dos los factores fundamentales en la teoría del aprendizaje significativo propuesta por Ausubel: por un lado, la propia estructura cognitiva del alumno y, por otro lado, el contenido en sí mismo, tratado este último casi exclusivamente desde un punto de vista conceptual.

Ausubel afirma que la estructura cognitiva se organiza de forma jerárquica respecto al nivel de generalidad e inclusividad de los conceptos y que, como consecuencia de ello, se tiene que el aprendizaje significativo se caracteriza de la misma manera, mediante el establecimiento de relaciones jerárquicas entre conceptos.

Establece así tres formas de aprendizaje: a) el aprendizaje subordinado, que se produce cuando el conocimiento previo es más general e inclusivo -los conocidos inclusores de Ausubel- que el nuevo conocimiento a adquirir, b) el aprendizaje supraordenado, que se produce cuando el conocimiento previo es más específico que el nuevo conocimiento y c) el aprendizaje combinatorio, producido cuando el nuevo conocimiento no puede ni subordinarse ni supraordenarse con respecto al conocimiento ya adquirido.

En relación a ello, Ausubel insiste en la organización jerárquica de la estructura cognitiva y en su dinamismo, su modificación y su reorganización constante en el transcurso del aprendizaje significativo, siendo la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora los dos procesos que principalmente lo caracterizan (Ausubel et al., 1976).

García (1990) lo expresa de la siguiente manera:

A medida que el aprendizaje significativo tiene lugar, los conceptos inclusores se modifican y desarrollan, haciéndose cada vez más diferenciados. Este proceso de diferenciación progresiva produce una estructura cognitiva organizada jerárquicamente en la dirección arriba-abajo, con el consiguiente refinamiento conceptual y un fortalecimiento de las posibilidades de aprendizaje significativo al aumentar la densidad de ideas relevantes en las que se pueden anclar los nuevos conceptos. (p.85)

Este proceso de diferenciación progresiva arriba-abajo hace para Ausubel superior el aprendizaje subordinado, por lo que la organización jerárquica consecuente es de tipo descendente. Así, los conceptos más generales e inclusivos se sitúan en la parte más alta de la jerarquía y los conceptos más específicos en los lugares más bajos de la misma.

Cabe destacar que, como es lógico, esta consideración jerárquica, induce una mayor complejidad en la estructura cognitiva a medida que se producen nuevos aprendizajes.

Todo ello indica que la organización de los contenidos objeto de enseñanza, posee un papel primordial en el aprendizaje significativo. Desde esta perspectiva, parece condición imprescindible la realización de análisis conceptuales de los contenidos disciplinares que ayuden a explorar las relaciones existentes entre los mismos.

Sin embargo, cabe mencionar que son poco habituales entre el profesorado tareas relacionadas con este tipo de análisis y su consecuente organización de los contenidos en los procesos de planificación de la enseñanza.

En este sentido, Ausubel (1973) afirma que “se efectúan pocos esfuerzos serios con la finalidad explícita de explorar las relaciones entre estos conceptos, señalar sus similitudes y diferencias significativas y conciliar sus inconsistencias reales o aparentes” (p.234).

Por otro lado, como se ha comentado con anterioridad, el respeto de la estructura lógica interna de una disciplina, es fundamental en los procesos de programación de enseñanza de la misma (véase Capítulo 2.Especificidades de la disciplina matemática en el contexto del estudio).

A este respecto, la organización secuencial es uno de los principios que Ausubel propone para la programación del contenido de una disciplina encaminada a la consecución de aprendizajes significativos en el alumnado. Rodríguez (2008) define sus bases de la siguiente manera:

> *[…] es necesario respetar las relaciones naturales de dependencia del contenido. Así, el material estudiado y aprendido en primer lugar o presentado previamente ejerce el papel de soporte ideacional u organizador del que se presentará a continuación; de este modo, actúa como facilitador, justificando así la importancia que tiene una organización curricular en secuencia.* (p.20)

Con ello, la organización secuencial del contenido de enseñanza que Ausubel propone parte de un análisis de contenido de la disciplina, teniendo en cuenta su estructura lógica, su organización interna y sus núcleos conceptuales más significativos.

Para tal organización, dota de gran valor a la estructura cognitiva de la que parte el alumno, esto es, a la identificación de los conocimientos previos del alumno. Así, Ausubel et al. (1976) afirman que "si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (p.6).

Así, una vez identificados esos conocimientos y atendiendo a los factores citados, fundamenta la necesidad de establecer 'puentes' entre esos conocimientos previos del alumno, esto es, entre lo que el alumno ya conoce y lo que el mismo necesita conocer, de forma que estos funcionen como soporte para el nuevo aprendizaje.

Es por ello por lo que una buena labor de esos puentes es primordial. Ausubel se refiere a ellos como organizadores previos, avanzados o básicos de una disciplina, caracterizándose por un nivel de generalidad mayor que el contenido a aprender. En relación a ello, Ausubel et al. (1976) manifiestan que "la función principal del organizador es salvar el abismo que existe entre lo que el alumno ya sabe y lo que necesita saber antes de que aprenda con buenos resultados la tarea inmediata" (p.179).

Como complemento didáctico indispensable de los organizadores previos de Ausubel, Rodríguez (2008) destaca la importancia del empleo, en el proceso de enseñanza, de materiales con significado lógico, esto es, que enlacen de forma no arbitraria con ideas ya presentes en la estructura cognitiva del alumnado.

A este respecto Ausubel critica el modo de organización de los contenidos en los libros de texto, una de las concreciones curriculares de referencia en el proceso de enseñanza (véase apartado 1.2. Concreciones curriculares. Libros de texto).

Para él, la organización que en ellos se establece es una relación fundamentalmente temática, en la que prácticamente no se presta atención a la generalización e inclusividad de unos contenidos frente a otros. Manifiesta, además, que el único organizador previo que se muestra en ellos es un índice que no induce ningún tipo de relación entre los contenidos que presenta.

Esta organización resulta así incompatible con la propia estructura lógica interna de las disciplinas en cuestión, lo que se encuentra lejos de las ventajas que producen el respeto a la misma y, en consecuencia, lejos de un aprendizaje significativo de los contenidos que las constituyen.

Además, estos materiales didácticos manifiestan una programación lineal, sin una organización jerárquica global que permita la exploración de relaciones e interconexiones entre diferentes contenidos y diferentes unidades didácticas (Ausubel y Barberán, 2002).

En este mismo sentido, Rodríguez (2008) afirma: “no se puede desarrollar aprendizaje significativo en el alumnado con una organización del contenido lineal y simplista” (p.31).

Opuesto a la secuenciación lineal de contenidos, Ausubel destaca, para la consecución de un aprendizaje significativo, la importancia de acciones tales como retomar contenidos, reiterar, recapitular, consolidar, realizar continuas aproximaciones, rescatar significados ya adquiridos, aplicar aprendizajes ya desarrollados, etc. Acciones que, además, suponen el punto de encuentro entre el aprendizaje significativo y el currículo en espiral en el sentido de Bruner (2004).

Con todo ello, esta teoría pone el acento en la necesidad de una adecuada organización del conocimiento que se desea aprender y en las reestructuraciones que sufre la estructura cognitiva del alumno con la asimilación significativa del nuevo conocimiento (Pozo, 1989).

3.2. Teoría instruccional y aprendizaje en espiral de Bruner

La aportación de Bruner (Bruner, 1963, 1991, 1998, 2003) desde su teoría instruccional (Bruner, 1966) y el aprendizaje en espiral (Bruner, 2004) es también fundamento de la presente investigación.

Dentro de las características esenciales de la teoría instruccional de Bruner fuertemente relacionadas con este estudio, se encuentran la importancia del conocimiento de la estructura del contenido objeto de enseñanza y el aprendizaje del mismo de forma activa, a través del propio descubrimiento.

Respecto a la estructura del contenido, Bruner ha enfatizado la importancia de conseguir que los alumnos perciban la estructura que forman los contenidos que van a aprender. Afirma que, percibiendo las relaciones entre los contenidos, el nuevo conocimiento es interiorizado adecuadamente como un todo organizado, facilitando, además, la identificación de contenidos generadores de conocimiento que ofrece la propia disciplina en cuestión, a la que estos pertenecen.

Para ello es fundamental que el docente planifique un modo adecuado de organización de los contenidos a enseñar y unas secuencias instructivas efectivas de los mismos. En este sentido, si bien Bruner considera esencial la organización y secuenciación de los contenidos objetos a enseñar, no aporta criterios específicos para la planificación de ambos procesos, advirtiendo que no existe un único criterio mejor que el resto. A este respecto, es preciso destacar que Bruner se manifiesta en contra de las secuenciaciones lineales de los programas de aprendizaje.

Además de la labor del profesorado en una adecuada planificación en la organización y secuenciación de los contenidos, Bruner destaca la importancia de un aprendizaje activo por descubrimiento guiado, de forma que el docente proporcione la guía -lo que Bruner denomina andamiaje- mediante estrategias que estimulen a los alumnos a descubrir por sí mismos la estructura que forman los contenidos que van a aprender.

Además, este tipo de aprendizaje facilita el razonamiento de tipo inductivo, respetando en ese sentido una de las especificidades de la matemática como disciplina, en este caso la relativa al tipo de razonamiento característico de la misma (véase Capítulo 2. Especificidades de la disciplina matemática en el contexto del estudio). En referencia también al necesario respeto a la disciplina, Bruner promueve, al mismo tiempo, la implantación de estrategias que induzcan a la comprensión del propio quehacer matemático.

Otra de las aportaciones de Bruner relacionada con esta investigación es el estudio de la importancia de un aprendizaje periódico y su consecuente propuesta de un diseño del currículo acorde a este tipo de aprendizaje.

Como es bien sabido, Bruner propuso el término de espiral para referirse a un tipo de aprendizaje en el que se trabajan los mismos contenidos periódicamente cada vez con mayor detalle y profundidad.

Así, cabe destacar, en este contexto, que este tipo de aprendizaje lleva asociada una forma de organización de los contenidos también en espiral, cuya secuenciación produce una asimilación progresiva de los contenidos y una percepción de la estructura global que forman el conjunto de los mismos.

3.3. Teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè

Dentro del modelo de aprendizaje elaborado por Gagnè (Gagnè, 1970, 1973), es de especial interés en el contexto de esta investigación, su concepción jerárquica.

Como es bien conocido, la teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè plantea ocho tipos o niveles de aprendizaje (aprendizaje de señales, aprendizaje estímulo-respuesta, concatenación, asociación verbal, aprendizaje de discriminaciones, aprendizaje de conceptos, aprendizaje de reglas y capacidad de resolver problemas) y una jerarquización de los mismos desde el punto de vista del orden secuencial de adquisición.

En relación a esta concepción del aprendizaje, el propio Gagnè (1970) explica que “la condición más importante que permite distinguir entre una forma y otra de aprendizaje es su estado inicial, en otras palabras: sus requisitos previos” (p.55).

Así, el orden de enumeración de los ocho tipos de aprendizaje, describe el concepto de jerarquía de aprendizaje en el sentido de Gagnè. Cada uno de los aprendizajes representa una adquisición de capacidades y el orden de enumeración en que se presentan describe el orden de adquisición de las mismas, de forma que para que ciertas capacidades puedan ser adquiridas, es necesario que las anteriores hayan sido aseguradas.

En este sentido "el criterio de competencia para la adquisición de un aprendizaje determinado consiste en que el sujeto haya adquirido previamente los tipos de aprendizajes que estén situados por debajo del mismo en la correspondiente jerarquía" (Gutiérrez, 1989, p.150).

El propio Gagnè (1970) lo describe con las siguientes palabras:

> *Si la adquisición de determinadas capacidades se fundamenta en la posesión de otras, es posible entonces 'actuar hacia atrás' respecto a cualquier objetivo de aprendizaje necesario como requisito previo; incluso es posible recorrer hacia atrás todo el camino hasta llegar a las asociaciones verbales y cadenas más sencillas. Al efectuar un análisis de este tipo se obtiene una especie de plano de lo que ha de aprenderse […].* (p.157-158)

Los autores Pérez, Suero, Montanero y Montanero (2000a) lo ejemplifican de la siguiente manera:

> *Así, por ejemplo, la enseñanza de los procedimientos para operar con 'sistemas de ecuaciones' en el Segundo ciclo de la E.S.O., exigiría que el profesor se asegure, antes que nada, de que el alumno domina las operaciones de cálculo más básicas (con fracciones, potencias, raíces...); posteriormente, las operaciones con ecuaciones muy simples y con una sola incógnita; y así sucesivamente, hasta llegar a dominar las diferentes estrategias de resolución por 'sustitución', 'igualación' y 'reducción', pasando por tantas otras habilidades previas como el análisis de tareas que el experto explicite.* (p.15)

Así, la base de la teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè es el análisis de tareas, análisis que, como es bien es sabido, recomienda comenzar todo proceso de planificación de la enseñanza con aquellas habilidades más básicas y simples que son prerrequisito del aprendizaje de otras.

Con ello, la secuenciación didáctica que plantea Gagnè tiene su fundamentación en la jerarquización de capacidades, destrezas y habilidades. Una jerarquización que es además de tipo ascendente, ya que refleja el paso de las habilidades más básicas a las más complejas.

En consecuencia, la elaboración de estas jerarquías de aprendizaje, conocidas como jerarquías gagnetianas, supone un proceso divisible en dos subprocesos. Por un lado, supone la identificación de la tarea objetivo, así como la identificación de los elementos que la componen y, por otro lado, supone el establecimiento posterior de la secuencia de aprendizaje de los mismos, teniendo en cuenta que aquellos que implican capacidades de nivel inferior deben anteceder a los que implican capacidades de nivel superior.

La técnica que propone Gagnè (1962) para el establecimiento de secuencias didácticas está basada, así, en un análisis lógico de la materia objeto de enseñanza:

> *Cuando uno empieza a describir la ejecución de una clase determinada de tareas como criterio de conducta terminal, es posible identificar los conjuntos de aprendizajes subordinados requeridos […]. La pregunta puede ser expresada más exactamente de la siguiente manera: ¿qué tendría que ser capaz de hacer el individuo para poder realizar con éxito esta tarea, suponiendo que sólo se le van a dar instrucciones? Esta pregunta se aplica sucesivamente a las clases de tareas subordinadas que se han identificado en la respuesta.* (p.358)

Con ello, es preciso tener en cuenta que para este diseño de elaboración de jerarquías de aprendizaje, acorde al criterio de adquisición de competencias descrito, no se tiene en cuenta ningún punto de vista psicológico ni evolutivo. Únicamente se realiza conforme a un punto de vista lógico, por lo que, si el diseño es correcto, las jerarquías deberían ser válidas para todos los alumnos, independientemente de su edad y circunstancias individuales. El propio Gagnè (1970) lo describe con las siguientes palabras:

> *Es importante advertir que no se pretende describir (con jerarquías de aprendizaje) una 'secuencia evolutiva', relacionando el aprendizaje de un sujeto con su estado de desarrollo o edad cronológica. Los tipos simples de aprendizaje tienen lugar durante todo el tiempo en que el individuo es sujeto de aprendizaje, cualquiera que sea su edad. Un estudiante de cálculo, por ejemplo, aprende a identificar el signo de integración esencialmente bajo las mismas condiciones en que otro de aritmética aprende el signo de dividir. En ambos casos se puede comprobar una secuencia de aprendizaje en la que las formas más complejas de aprendizaje se fundamentan en las más simples. Es este tipo de secuencia el foco de nuestro interés, independientemente del estado de desarrollo del sujeto […].* (p.159)

En consecuencia, es la propia estructura de la disciplina la que permite una organización jerárquica de las habilidades y destrezas a adquirir.

Por ello, es condición indispensable para la elaboración de jerarquías gagnetianas, tal y como afirman Phillips y Kelly (1975), que el diseñador de las mismas conozca la estructura de la disciplina a enseñar y sea, por tanto, un especialista en la materia. Solamente de esta forma, podrá identificar con precisión, las destrezas que se consideran necesarias para la adquisición de otras.

En este sentido, una vez más, es fundamental el respeto hacia la estructura de la disciplina objeto de aprendizaje (véase Capítulo 2. Especificidades de la disciplina matemática en el contexto del estudio), ya que es esta misma la que ofrece la base para la creación de secuencias didácticas en el contexto de esta teoría.

Cabe destacar que muchos docentes aplican, casi sin ser conscientes de ello, esta teoría de carácter instruccional en sus procesos de planificación de la enseñanza. Como afirma Gutiérrez (1989), son muchas las ocasiones en las que los docentes realizan secuencias desde aquello que parece más sencillo hasta aquello que parece más complicado.

Este tipo de secuencias siguen así la lógica de los conceptos científicos que se pretende enseñar, edificando sobre los conceptos más simples, los conceptos más complejos.

3.4. Teoría de la elaboración de Reigeluth

Otro fundamento teórico notable de la presente investigación, lo constituyen algunos de los principios de la teoría de la elaboración (Reigeluth, 1979; Reigeluth y Stein, 1983; Coll, 1987; Reigeluth, 1987; Reigeluth y Curtis, 1987; Reigeluth y Stein, 1987; Sacristán y Gómez, 1989; Coll y Rochera, 1990; Reigeluth, 1999; Reigeluth, 2013).

Como es bien sabido, esta teoría se desarrolla en torno a la importancia que cobran la selección, organización y secuenciación de los contenidos objeto de estudio, siendo su principal propósito el de disponer la mejor manera de seleccionar, organizar y secuenciar contenidos para un adecuado desarrollo de su enseñanza. Es por ello por lo que esta teoría está basada en el análisis de la estructura del conocimiento, así como en los procesos cognitivos de las teorías del aprendizaje.

Los autores que han ideado esta teoría comentan sobre ella:

[…] está basada en el análisis de la estructura del conocimiento así como en los procesos cognitivos de las teorías del aprendizaje […].El aspecto más importante de todos los modelos

es una clase especial de secuencia que va de lo simple a lo complejo, la cual es una extensión de la secuencia subsunmptiva de Ausubel, el currículum espiral de Bruner y el aprendizaje en red de Norman. (Reigeluth y Stein, 1983, p.337)

De forma similar a la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel), esta teoría hace hincapié, para la consecución de una adecuada estructuración de contenidos, en la importancia de un análisis de contenido de la disciplina objeto de enseñanza y un respeto hacia la estructura lógica interna de la misma.

La teoría de la elaboración complementa el tratamiento casi puramente conceptual realizado por Ausubel, junto a su propuesta de una jerarquización descendente de los contenidos -de los más generales a los más específicos- con el tratamiento más procedimental y la jerarquización ascendente -en el sentido de pasar de las habilidades más básicas que los alumnos puedan realizar, a las estrategias más complejas que puedan llevar a cabo- del modelo de Gagnè.

Así, la teoría de la elaboración es doble punto de encuentro entre la teoría del aprendizaje de Ausubel y el modelo de Gagnè. Por un lado, es punto de encuentro entre el tratamiento conceptual de Ausubel y el tratamiento procedimental de Gagnè, ya que esta teoría no contempla un solo tipo de contenidos, pues considera tanto conceptos como principios y procedimientos. Si bien cabe destacar, en este sentido, que aunque contempla tres tipos de contenidos, trabaja centrándose en uno de ellos como eje vertebrador del proceso y complementándose con los otros dos.

Por otro lado, la teoría de la elaboración es punto de encuentro entre la jerarquización descendente de Ausubel y la jerarquización ascendente de Gagnè, ya que propone un ascenso y descenso alternado en la jerarquía, con la finalidad de contribuir a la recapitulación, diferenciación progresiva y reconciliación integradora del conocimiento, aspectos que también destaca Ausubel (Novak, 1988a).

En este aspecto relativo a la recapitulación y consolidación del conocimiento es donde, además, la teoría de la elaboración es de nuevo punto de encuentro, esta vez, entre la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel y el aprendizaje en espiral de Bruner (véase apartado 3.2. Teoría instruccional y aprendizaje en espiral de Bruner).

Concretamente, la propuesta de la teoría de la elaboración comienza con la determinación de un tipo de contenido (conceptos, principios o procedimientos), el contenido organizador. El tipo de contenido elegido es el que regirá el resto del proceso, aunque, como ya se ha comentado, este puede completarse con aportaciones de los otros dos.

Se seleccionan a continuación una serie de contenidos del tipo elegido que se consideran fundamentales, representativos o básicos de todo el conjunto de contenidos objeto de enseñanza. Es preciso destacar que la elección no debe hacerse acorde a la consideración de ser contenidos previos a los contenidos del conjunto objeto de enseñanza, sino acorde al hecho de que puedan mostrarse como una ampliación en detalle o conocimiento más complejo sobre ellos.

Una vez seleccionados, se comienza con una presentación de esos contenidos a un nivel simple y general, constituyendo lo que se conoce con el término de 'epítome' en el contexto de esta teoría.

A partir de ello, se trabaja a un nivel mayor de detalle sobre una parte de esos contenidos, constituyendo así secuencias conocidas como secuencias de elaboración, que van de lo general a lo específico (descendente).

Tras ello, se vuelve al punto de partida para relacionarlo con la primera presentación, desarrollando así secuencias que van de lo específico a lo general (ascendente). Con ello se enriquece y mejora el epítome inicial, formando lo que recibe el nombre de 'epítome ampliado'.

Este proceso se repite con cada una de las partes del conjunto de contenidos que determinan el epítome, hasta que todas ellas hayan sido revisadas en un primer nivel. El mismo proceso puede repetirse con un segundo nivel, de forma que este es idéntico al primero, con la única salvedad de que trabaja sobre un aspecto del primer nivel y no sobre un aspecto del epítome.

Ello se repite entonces de manera sucesiva, formando lo que se conocen como niveles de elaboración cada vez más específicos, de forma que cada nivel de elaboración realiza para el siguiente la labor del epítome, de forma similar a como este lo hace para el primero de los niveles de elaboración.

La teoría de la elaboración propone así tipologías de relaciones tales como subordinadas, supraordenadas y coordinadas, dependiendo de si se trata de secuencias entre diferentes niveles o en un mismo nivel de elaboración. Junto a ello y, dentro de cada tipología, pueden establecerse entonces relaciones concretas entre los contenidos de estudio.

Cabe destacar que, después de cada uno de los niveles de elaboración y antes de pasar al epítome ampliado, se realiza una recapitulación, ya que, “para que tenga lugar un proceso de aprendizaje es importante revisar sistemáticamente lo que se ha aprendido, de tal manera que se previene el olvido de los contenidos y se establecen redes entre unos contenidos y otros” (Reigeluth y Stein, 1983, p.361).

Por todo lo anterior, la forma de organización y secuenciación de contenidos que propone la teoría de la elaboración facilita el diseño de microsecuencias y macrosecuencias, permitiendo así, entre otros, la organización y secuenciación de contenidos aplicables, tanto a la enseñanza de unidades didácticas como a la de una materia completa, empleando para ello cortos y amplios periodos de tiempo, respectivamente.

Con todo ello, puede decirse que la teoría de la elaboración se ha convertido en un punto de referencia para otras teorías de enseñanza, tanto a nivel micro-organizativo como a nivel macro-organizativo.

3.5. Otros fundamentos teóricos

Además del sólido fundamento teórico presentado, existe una gran variedad de aportaciones, sin entidad de teoría, que ofrecen interesantes criterios para la planificación de la enseñanza en lo relativo a procesos de selección, organización y secuenciación de contenidos.

Respecto a una selección adecuada de los contenidos objetos de enseñanza, Zabalza (2009) considera, por ejemplo, los siguientes criterios de selección:

- Representatividad, de forma que los contenidos seleccionados formen un buen reflejo del conjunto total de contenidos.
- Ejemplaridad, atendiendo a la elección de los contenidos fundamentales.
- Significación epistemológica, identificando los contenidos clave en el sentido de que actúan como sistema de conexión de la estructura temática.
- Transferibilidad, privilegiando los aspectos de mayor transferencia instructiva.
- Durabilidad, centrándose en factores menos perecederos.

- Convencionalidad y consenso, considerando aquellos aspectos sobre los que hay acuerdos en la comunidad académica-científica.

- Especificidad, teniendo en cuenta conceptos que sean difícilmente abordables desde otras disciplinas o áreas temáticas.

En ese sentido, King y Brownell (1966) indican la necesidad de identificación de los elementos más característicos de la materia objeto de estudio, efectuando un listado de los conceptos críticos de la misma.

Sobre la organización de contenidos, además de los criterios ya mencionados, parece que una de las formas de estructuración más comunes, es la que atiende a la propia estructura de la disciplina en cuestión. Así, por ejemplo, una organización habitual de los contenidos de la disciplina matemática, se basa en la diferenciación de contenidos acorde al área de Álgebra, de Análisis, de Aritmética, de Geometría, de Estadística y de Probabilidad.

Cabe destacar respecto de esta organización que, a pesar de su aparente sencillez, es un proceso complicado, ya que, aunque parece que podría tratarse como mera clasificación, en la práctica existen contenidos de complicada categorización.

Existen también otras formas de organización de contenidos menos comunes, como la que propone Rico (1997), en base a lo que él mismo denomina 'organizadores del currículo'. Estos organizadores atienden a los errores y dificultades que normalmente se detectan en el aprendizaje, a la diversidad de las representaciones utilizadas, a la fenomenología de los conocimientos implicados, a sus aplicaciones prácticas, a su evolución histórica y a la diversidad de los materiales manipulativos y de los recursos existentes.

Por otro lado, Brihuega, Molero y Salvador (1998) recomiendan, particularmente para los contenidos matemáticos de Educación Secundaria, una organización de los mismos en base a unos ejes estructuradores o hilos argumentales, fundamentados en aspectos tales como:

- Epistemología, basada en la propia estructura de la matemática como disciplina.

- Metodología, fundamentada en estrategias metodológicas como la resolución de problemas.

- Motivación, acorde a puntos de interés del alumnado.

- Tratamiento de temas transversales.

Estos autores advierten también la posibilidad de considerar un solo eje estructurador, varios, o incluso todos, en una misma planificación de la enseñanza.

Respecto al empleo de un eje motivacional, es preciso tener cautela, ya que, como afirma Gallegos (1998), aunque este eje pueda suponer una potenciación de la curiosidad e interés en aprender por parte del alumnado, puede, por otro lado, hacer confundir, en algún momento, los intereses de los alumnos con sus necesidades educativas.

En este contexto, Coll y Solé (1989) y Coll, Marchesi y Palacios (1990) afirman que el uso de un eje motivacional puede ser una buena alternativa en niveles curriculares iniciales, siendo necesario modificarlo y adecuarlo en niveles superiores para poder tratar de forma equilibrada los contenidos propios de cada nivel educativo. Advierten, además, que el uso único de un eje motivacional proporciona una estructuración de los contenidos en compartimentos estancos, en contra de uno de los principios básicos de organización adecuada del contenido.

En relación al tratamiento de temas transversales como posible eje estructurador de contenidos, es preciso destacar que pueden considerarse dos tipos de ejes, atendiendo a la dirección dentro del currículo en la que se desarrolle la transversalidad: horizontal y vertical (Álvarez, Balaguer y Carol, 2000). Así, con un eje horizontal puede tratarse la transversalidad en diversas materias dentro de un mismo período de tiempo, mientras que con un eje vertical puede tratarse en una misma materia a lo largo de varios períodos de organización escolar.

En relación a ello Quesada (2001) propone también esa doble tipología de estructuración de contenidos, acorde a criterios de verticalidad y horizontalidad.

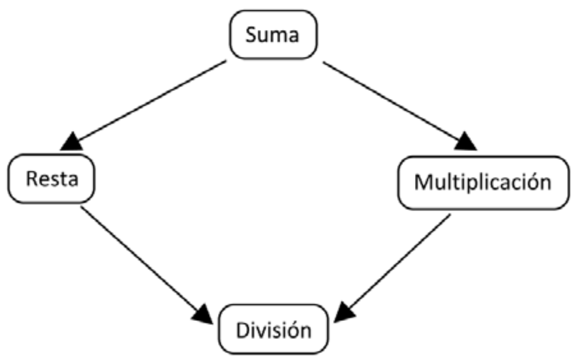
Con respecto a la secuenciación de contenidos, se ha demostrado que el orden en que se presentan al alumno tiene incidencia en los resultados de su aprendizaje, siendo esta incidencia además tanto de carácter cuantitativo como de carácter cualitativo. Cuantitativo en relación a la cantidad de aprendizaje logrado y cualitativo en relación al tipo de aprendizaje logrado (Escudero, 1979).

Además del orden es necesario planificar las secuencias de forma que sus ‘eslabones’ tengan una amplitud lo suficientemente pequeña como para que puedan favorecer un aprendizaje significativo, así como definir con precisión la relación que se establece entre los contenidos que se pretende enseñar (Gallegos, 1998).

En este sentido, Rodríguez (1983) diferencia, por ejemplo, el criterio jerárquico del lógico, entendiendo este último como aquel en el que se tiene en cuenta el carácter previo o posterior de un contenido sobre otro.

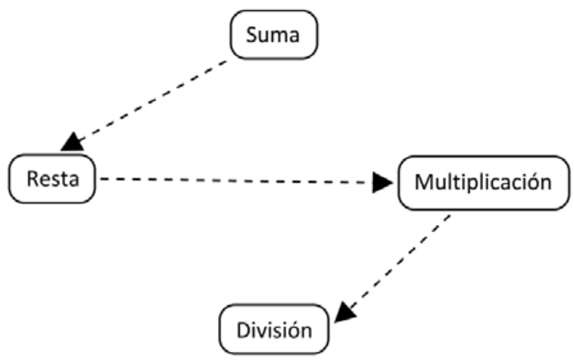
Así, en relación a la estructuración de los cuatro contenidos representados en la Figura 2, podrían deducirse las dos secuencias lógicas de contenidos mostradas en la Figura 3 y en la Figura 4, eso sí, teniendo en cuenta que la secuencia didáctica en sí exige que el alumno transite por las dos secuencias lógicas mostradas (Rodríguez, 1983).

Figura 2. Ejemplo de estructuración lógica de contenidos



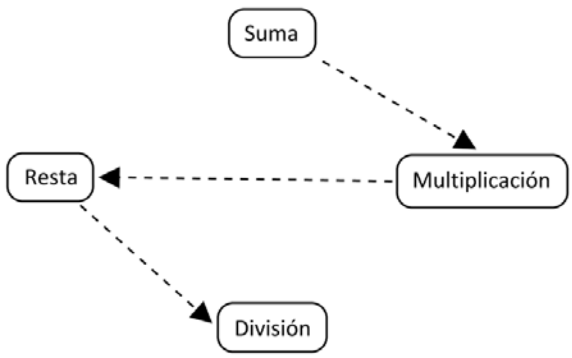
Fuente: esquema recuperado de Rodríguez (1983, p.68)

Figura 3. Una posible secuencia lógica de contenidos



Fuente: esquema recuperado de Rodríguez (1983, p.68)

Figura 4. Otra posible secuencia lógica de contenidos



Fuente: esquema recuperado de Rodríguez (1983, p.68)

Además, en cuanto a la estructuración lógica de las secuencias, Kopp (1967) señala criterios tales como la objetividad, el acercamiento a la realidad, la posibilidad de profundización o la ejemplaridad.

Sin embargo, existen criterios de secuenciación en ligera contradicción con los criterios lógicos, como el de aleatoriedad de Tennyson (1972), dando lugar a secuencias aleatorias. Por otra parte, para Landa (1976), las secuenciaciones lógicas y jerárquicas pueden contemplarse conjuntamente como criterio, asociando una secuenciación jerárquica dentro de una secuenciación lógica.

No obstante, para autores como Brihuega et al. (1998) los criterios que se deben tener en cuenta para una adecuada secuenciación de contenidos matemáticos son: el tener presentes los aprendizajes escolares previos de los alumnos y la lógica interna de la matemática.

Por otro lado, si se consideran como criterios la importancia de los contenidos involucrados en una secuencia y la duración del proceso de enseñanza de los mismos, Zabalza (2009) propone los siguientes tipos de secuencias:

- Simples homogéneas, en las que se asigna la misma importancia a todos los contenidos involucrados.
- Simples heterogéneas, en las que no a todos los contenidos se les asigna la misma importancia.

- Simples equidistantes, en las que a todos los contenidos que forman la secuencia se les asigna la misma duración.

- Simples no equidistantes, en las que existen contenidos de diferente duración.

- Complejas con alternativas, en las que otras variables son posibles, como las de ofrecer alternativas, establecer entradas y salidas durante el proceso, etc.

- Complejas con retroactividad, en las que se tratan saltos hacia delante y hacia atrás, estos últimos con la finalidad de aclarar y reasegurar el aprendizaje de ciertos contenidos.

- En espiral, en las que la periodicidad es un factor fundamental.

- Convergentes, basadas en el tratamiento de un contenido desde diferentes puntos de vista.

Con todo lo anterior y, tras el establecimiento de criterios y el desarrollo de los procesos de selección, organización y secuenciación de los contenidos objetos de enseñanza, no hay que olvidar la importancia de una percepción global de la estructuración de los mismos.

3.6. Fundamentación ecléctica

Cabe destacar que las diferentes teorías mencionadas con anterioridad, no solamente fundamentan de forma independiente el propósito de la presente investigación, sino que todas ellas poseen puntos de encuentro en factores primordiales para este estudio, constituyendo así una sólida base para el mismo.

Así, si se tiene en cuenta que la organización de contenido que se propone en esta investigación se basa en una estructuración jerárquica que atiende a un carácter epistemológico de la disciplina de estudio en cuestión, plausible en relaciones establecidas entre contenidos, fundamentadas en la necesidad del conocimiento de unos contenidos para la comprensión de otros, las teorías tratadas son respaldo esencial, por un lado, de manera independiente, ya que:

- La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel fundamenta, como uno de los factores primordiales para el aprendizaje significativo, una adecuada organización del contenido objeto de enseñanza. Para ello, propone una estructuración del contenido basada en relaciones de generalidad y especificidad de los contenidos, que, si bien no es similar a la propuesta en esta investigación, ambas dan lugar a una estructuración de tipo jerárquico, en base a un aprendizaje significativo.

Esa estructuración jerárquica es para Ausubel de tipo descendente, al recomendar situar los contenidos generales en la parte alta de la jerarquía y los más específicos en la parte baja de la misma. En este sentido, la jerarquía tratada en este estudio puede considerarse también descendente, si se parte de un contenido en la parte alta de la jerarquía con el objetivo de detectar aquellos contenidos que se fundamentan en el mismo.

Mencionar, por otro lado, la similitud con esta teoría en el tratamiento casi puramente conceptual del contenido.

Es importante destacar, además, que la metodología empleada en esta investigación facilita la elaboración de los organizadores previos, avanzados o básicos de los que habla Ausubel. Y es que la metodología propuesta identifica, con facilidad, aquellos contenidos que forman los ‘puentes’ necesarios entre los contenidos que el alumno ya conoce y aquellos que desea conocer.

- La teoría instruccional de Bruner destaca también la importancia de una adecuada estructuración del contenido de enseñanza, enfatizando las buenas consecuencias que tiene el hecho de que el alumno perciba la estructura que forman los contenidos que va aprender.

  En ese sentido, de nuevo la metodología empleada en esta investigación supone una interesante aportación al respecto, ya que esta permite no solo la elaboración de esa estructura de contenidos sino también una visualización gráfica de la misma, aspectos, sin duda, de gran relevancia para tal propósito.

  Por otro lado, la falta de especificación de Bruner en relación a los criterios que determinan la organización y secuenciación de los contenidos, se ve completada con la propuesta al respecto en esta investigación.

  Es preciso destacar, además, que una adecuada planificación conforme a la estructuración de contenidos como la que se propone en el presente estudio, puede inducir a la tipología de aprendizaje por descubrimiento respaldada por Bruner.

De igual modo, ciertos aspectos de otra de las propuestas de Bruner, el aprendizaje en espiral, cabe analizarse con la metodología propuesta en este estudio. Concretamente, puede examinarse el grado real de la puesta en práctica de tal tipología de aprendizaje en concreciones curriculares tales como los libros de texto. Además, tal tipo de análisis puede completarse fácilmente con la concreción de aquellos contenidos idóneos para un tratamiento periódico y de consolidación.

- La teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè, es fundamento para la presente investigación, desde el punto de vista de la concepción jerárquica del aprendizaje que respalda.

  Si bien es cierto que tal jerarquía se establece como consecuencia de un análisis de tareas de la materia de estudio y no a través de un análisis de contenido, tal y como se desarrolla en esta investigación, el punto de encuentro entre ambas se localiza en su propia concepción.

  Así, ambas organizaciones, aunque no atienden a la misma tipología de contenido, sí coinciden en su criterio de estructuración. Este criterio, basado en el orden, sitúa en la parte baja de la jerarquía aquellos contenidos que son necesarios que el alumno domine para poder acceder a los situados en la parte alta de la jerarquía.

  Esta jerarquía es, por tanto, de tipo ascendente y, en consecuencia, la considerada en esta investigación también puede verse así, siempre desde un punto de vista epistemológico de construcción del conocimiento.

- La teoría de la elaboración de Reigeluth, al contener fundamentos de las tres teorías anteriores, supone por sí misma una base firme para esta investigación.

  Además de los aspectos ya considerados, la propuesta general de esta investigación, junto con su metodología, permiten la visualización de diferentes niveles de elaboración en un sentido similar al de Reigeluth.

  Tal metodología es, además, de gran utilidad para la selección de los contenidos que podrían formar el epítome, ya que esta permite identificar con facilidad aquellos contenidos básicos y representativos de todo el conjunto de contenidos.

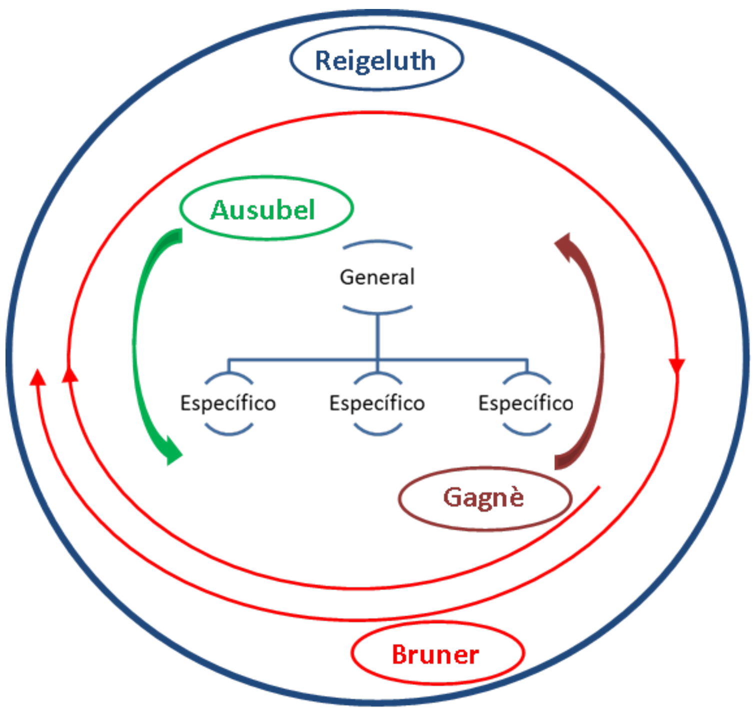
La metodología de esta investigación permite también cubrir la necesidad de visualización desde puntos de vista más generales y más específicos que respalda Reigeluth, ya que puede ofrecer representaciones gráficas, tanto de vistas panorámicas de los contenidos y sus relaciones como vistas detalladas de los mismos.

Por otro lado, el hecho de que la teoría de Reigeluth sea aplicable tanto a conceptos como principios y procedimientos, da cabida al tratamiento conceptual de la propuesta de este estudio.

Con todo lo anterior, además del respaldo teórico individual que cada una de estas teorías supone para la presente investigación, es muy importante destacar la fundamentación teórica que supone la visión conjunta de una serie de factores de las mismas.

Para una mejor comprensión, se ha elaborado el esquema de la Figura 5, en el que puede observarse de manera visual, la sólida fundamentación teórica de la presente investigación, dando cabida así, de forma relacionada, a teorías muy importantes del ámbito educativo.

Figura 5. Esquema general de la fundamentación teórica de la presente investigación



Fuente: elaboración propia

Así, en el contexto que se viene desarrollando y teniendo presentes las particularidades de cada teoría, se aprecia, en término generales, la siguiente visión conjunta de las mismas.

Por un lado, la jerarquía descendente, propuesta por Ausubel, se complementa con la jerarquía ascendente respaldada por Gagnè, ya que, aunque basadas en tipologías de contenido diferente, ambas resultan ser, como se ha mostrado, adecuadas para la planificación de procesos de enseñanza.

En ese mismo aspecto, la recomendación de Bruner en relación a la organización en espiral del contenido, conlleva la necesidad indispensable de una combinación de ambos tipos de jerarquía.

Por otro lado, la propuesta de organización de Reigeluth no solamente engloba todas las anteriores, sino que, además, respalda, en cierto sentido, una estructuración en espiral de periodicidad mucho menor que la destacada por Bruner.

Todo ello se contempla en la propuesta desarrollada en la presente investigación, cuya metodología, ha permitido su aplicación de una forma precisa, rigurosa y novedosa.

CAPÍTULO 4

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL CONOCIMIENTO

Uno de los puntos de partida para la planificación de determinados procesos de organización y secuenciación de contenidos de una disciplina se encuentra en el análisis de las relaciones existentes entre los contenidos que la constituyen.

Así, es por ello por lo que la reflexión tanto sobre el tipo de relaciones como sobre la determinación exacta de las mismas es un procedimiento de gran importancia a tener en cuenta.

Es claro que una representación gráfica del conocimiento organizado acorde a esas reflexiones resulta de gran ayuda en los mencionados procesos de organización y secuenciación del mismo.

Respecto a ello, cabe destacar que existe una gran variedad de instrumentos, estrategias o técnicas para ese tipo de representaciones gráficas del conocimiento (Arenas, 2005), de forma que estas comunican su estructura acorde, precisamente, a las reflexiones realizadas sobre el mismo.

Entre este tipo de representaciones gráficas cabe mencionar los mapas conceptuales (Novak y Gowin, 1988), los mapas mentales (Buzan y Buzan, 1996), los mapas semánticos, también conocidos como redes semánticas, organizadores semánticos, cadenas semánticas, gráficos léxicos o constelaciones (Pearson y Johnson, 1978; Johnson y Pearson, 1984; Fisher, 1990; Heimlich y Pittelman, 1990a; Heimlich y Pittelman, 1990b; Heimlich y Pittelman, 1991; Heimlich y Pittelman, 2001), los mapas cognitivos (Kitchin, 1994; de Castro, 1999), los mapas de pensamiento (Hyerle, 1996; Hyerle y Alper, 2011), los mapas de conocimiento (Howard, 1989; O'donnell, Dansereau y Hall, 2002), los mapas de ideas (Armbruster y Anderson, 1982), los diagramas de flujo (Geva, 1985), las redes conceptuales (Galagovsky, 1993, 1996), las redes asociativas pathfinder (Schvaneveldt, 1990), etc.

Este tipo de técnicas de representación gráfica del conocimiento, se encuentran muy fundamentadas en el aprendizaje significativo. De hecho, suelen categorizarse bajo el término común de organizadores gráficos (Beissner, Jonassen y Grabowski, 1994; Bromley, Irwin-DeVitis y Modlo, 1995), concepto introducido por Barrón (1991) y basado en la idea de los organizadores previos o avanzados de Ausubel (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel).

Barrón (1991), en base a la función de los organizadores propuestos por Ausubel, confirma que un tratamiento gráfico de los mismos facilita realmente su propósito de 'puente' entre los conocimientos previos ya adquiridos y los nuevos conocimientos.

A pesar de las particularidades de las diferentes técnicas de representación gráfica mencionadas, los autores Vidal-Abarca y Gilabert (1994) describen el procedimiento general de todas ellas como el "construir redes formadas por 'expresiones-nudo' y 'expresiones-conexión'. Las primeras representan conceptos, acciones o ideas, mientras que las segundas indican la relación existente entre las primeras" (p.75).

De entre todas ellas, se dota de mayor interés en la presente investigación a los mapas conceptuales y las redes asociativas pathfinder, constituyendo unas técnicas esenciales para algunos de los estudios relacionados con la misma.

4.1. Mapas conceptuales

Como se ha comentado, los mapas conceptuales (Novak, 1988a, 1988b; Novak y Gowin, 1988; Novak, 1991, 1995, 1998; Moreira, 2008) también conocidos como mapas de conceptos o esquemas conceptuales, son instrumentos, estrategias o técnicas de representación gráfica del conocimiento, que potencian reflexiones estructurales sobre el mismo.

Dentro de su categorización mencionada, como organizador gráfico, su técnica de elaboración está fundamentada en la teoría cognitiva del aprendizaje significativo de Ausubel (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel), de forma que los mapas conceptuales han demostrado ser eficaces para la adquisición del conocimiento, siendo facilitadores de un aprendizaje significativo (Cañas et al., 2003). Es por ello por lo que, en este sentido, los mapas conceptuales pueden considerarse como una proyección práctica de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel.

Cabe destacar, sin embargo, que los primeros mapas conceptuales -que datan de los años setenta- no se concibieron con un fin educativo. Estos realmente se elaboraron en el contexto de un programa de investigación[3] de Novak, siendo este y sus colaboradores, los precursores de la idea de esta técnica.

> *Los mapas conceptuales surgieron en la década de los años setenta como formas de reflejar las relaciones entre conceptos y/o proposiciones que se habían obtenido de entrevistas clínicas; a partir de ahí se han seguido perfeccionando como modos de plasmar la organización del conocimiento externamente y en su función de andamiaje mental.* (Rodríguez, 2008, p.22)

Conceptualización

En la actualidad, aunque todas en la misma línea, son muchas las definiciones existentes del término mapa conceptual, por lo que aportar una que considere a todas ellas, no es tarea nada sencilla.

Frente a esa diversidad de definiciones, Azcárate (2007) destaca la idea común a todas ellas de ser una representación gráfica de un conocimiento organizado. Sin embargo, una precisión mayor es obligada, para, al menos, distinguir esta técnica del resto de técnicas de representación gráfica del conocimiento.

[3] www.ihmc.us

En términos generales, podría definirse como una técnica facilitadora de la comprensión de nuevos conocimientos, relacionando estos con los ya adquiridos (Novak y Gowin, 1988). Sin embargo, así tampoco se hace distinción entre esta técnica y otras de las ya mencionadas, fundamentadas de la misma manera en el aprendizaje significativo.

En este contexto, la definición original de mapa conceptual es más precisa, ya que esta lo describe como una técnica de representación gráfica o un recurso esquemático que representa un conjunto de significados incluido en una estructura de proposiciones (Novak y Gowin, 1988).

Esta definición incluye así los términos de significado y proposición. En relación a ello, sí que existe coincidencia en la determinación de los elementos que constituyen un mapa conceptual. De acuerdo a Novak y Gowin (1988) estos están formados por tres elementos fundamentales: los conceptos, las proposiciones y las palabras enlace o palabras clave.

De esta forma, como es sabido, los conceptos involucrados en el mapa se relacionan mediante las palabras enlace, que además de describir la naturaleza de tales relaciones, dan lugar a las proposiciones, formando así unidades semánticas, representadas por dos o más conceptos unidos a través de esas palabras enlace.

Representación

En relación a los criterios de representación gráfica de un mapa conceptual, también existe diversidad. Como es bien conocido, habitualmente los conceptos se inscriben en figuras geométricas tales como rectángulos y circunferencias, de forma que el uso de más de un tipo de figura geométrica en un mismo mapa conceptual, suele realizarse con el fin de diferenciar distintos tipos de conceptos incluidos en el mismo.

Por otro lado, las relaciones entre conceptos suelen explicitarse gráficamente mediante líneas interrumpidas que unen los conceptos involucrados, colocando en esas interrupciones las palabras clave que las definen, siendo de esa forma como las proposiciones quedan representadas gráficamente. El orden en el que estas proposiciones deben ser leídas suele representarse con puntas de flecha sobre las líneas que las definen, si bien es cierto que tampoco existe unanimidad al respecto. Cabe destacar, por otro lado, que la longitud de tales líneas no posee significado alguno en la representación gráfica de un mapa conceptual.

Además de estos criterios habituales sobre la representación gráfica de los elementos fundamentales de un mapa conceptual, son importantes otros criterios relativos a su legibilidad y estética global.

Algunos de los factores que definen estos criterios corresponden a la cantidad de conceptos involucrados en el mapa, al número de cruces entre líneas, a la claridad de las interconexiones, al equilibrio en la distribución de sus elementos, etc.

Es claro que cuanto mayor es la cantidad de conceptos, palabras clave y proposiciones, más complicada es una representación legible y estética de un mapa conceptual. En la actualidad, existen programas que facilitan la elaboración de mapas conceptuales y que ayudan a tratar, de forma sencilla, ciertos aspectos más complejos de ajustar en una representación gráfica manual.

Entre todos los programas existentes para tal propósito, cabe destacar CmapTools[4] (Cañas et al., 2004; Novak y Cañas, 2006). Este software, desarrollado en el Instituto de Cognición Humana y de Máquinas (IHMC), ofrece, entre otras, particularidades muy interesantes tales como: gran facilidad en la elaboración de mapas conceptuales, adaptación de características estéticas, posibilidad de compartir con otros usuarios, opciones de colaboración asíncrona y/o sincrónica en su elaboración, de agregar recursos que ayudan a explicar su contenido, de promover comentarios, críticas y revisión por pares e incluso la opción de conectar unos mapas conceptuales con otros.

Otro aspecto importante a tener en cuenta relativo a la representación gráfica de los mapas conceptuales, es su habitual forma piramidal y la relación de ello con su carácter jerárquico.

Debido a que los mapas conceptuales se fundamentan en el aprendizaje significativo de Ausubel y para este el aprendizaje significativo se caracteriza por una jerarquía descendente (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel), de igual manera, para Novak y Gowin (1988), la jerarquía es una característica propia de los mapas conceptuales, esto es, para él, todo mapa conceptual es jerárquico. Motivo este por el que para la representación gráfica de los mapas conceptuales, propone posicionar los conceptos más generales en la parte superior de la representación y los más específicos en sucesivos niveles inferiores, representando así los distintos niveles jerárquicos.

[4] http://cmap.ihmc.us

De esta manera surge una doble dimensión del mapa conceptual, ya que, por un lado, se encuentra la verticalidad en la que se especifican las relaciones jerárquicas entre conceptos y, por otro lado, la horizontalidad, en la que se expresan las relaciones entre conceptos de un mismo nivel jerárquico.

Con todo ello, en la concepción de mapa conceptual según Novak, la jerarquía se encuentra doblemente representada, ya que, por un lado, las relaciones de generalidad y especificidad entre conceptos expresan jerarquía conceptual y, por otro lado, la propia representación gráfica del mismo induce a una jerarquía gráfica (Ontoria, 1994).

Sin embargo, en muchas ocasiones y debido a la variedad de concepciones existentes sobre los mapas conceptuales, son considerados también mapas conceptuales aquellos en los que la doble jerarquía no está representada.

Así, por ejemplo, suelen emplearse representaciones gráficas jerárquicas aún cuando las relaciones entre conceptos no expresen jerarquía. De la misma manera que relaciones jerárquicas entre conceptos no son, en ocasiones, representadas mediante una estructura gráfica jerárquica. Es por ello fundamental en estos casos expresar con claridad qué tipo de relación es el que se emplea en el mapa conceptual en cuestión, así como cuáles son los conceptos más generales y más específicos (Galán, Granell y Huerta, 2002; Moreira, 2008).

Para la elaboración de un mapa conceptual y su habitual representación gráfica jerárquica, se propone una serie de pasos ordenados a seguir, que, aunque tampoco es universal (Arenas, 2005), puede resumirse en: elegir la temática, seleccionar una parte de ella, realizar una lista de los conceptos más relevantes, ordenar los conceptos del más general al más específico, representarlos gráficamente, situando en la parte superior los más generales y de forma sucesiva los más específicos, situar las líneas y las palabras clave.

Utilidades

Como consecuencia de su amplia concepción, los mapas conceptuales poseen además una gran variedad de utilidades. Al respecto cabe señalar que existen evidencias de la validez de esta herramienta (Liu y Hinchey, 1993; Markham, Mintzes y Jones, 1994) y que incluso tienen su uso en ámbitos tan interesantes como la investigación, en los que se emplean como técnica (González, 1992; Raymond, 1997).

Dentro del contexto de la presente investigación, es preciso destacar que en el ámbito educativo suelen emplearse como instrumentos o estrategias de enseñanza y aprendizaje. Así, Rodríguez (2008) afirma que "[…] constituyen un vehículo muy útil, tanto para auxiliar al docente en la organización del contenido objeto de enseñanza, como al estudiante en la delimitación de los conceptos clave del mismo y de las relaciones que establecen […]" (p.22).

En todo caso, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje, los mapas conceptuales son de utilidad en la reflexión sobre las relaciones significativas existentes entre determinados contenidos (Novak y Gowin, 1988). Cabe destacar, además, que estos se emplean en todos los niveles de educativos, desde la Educación Infantil hasta la enseñanza universitaria y en áreas muy diversas, siendo especialmente utilizados en ciencias, principalmente en biología y muy poco en matemáticas (Malone y Dekkers, 1984; Hasemann y Mansfield, 1995; Brinkmann, 1999; Moreira, 2008).

Respecto al proceso de enseñanza, además de usarse para su planificación, suelen emplearse, entre otros, y de forma general, como técnica didáctica para la presentación al alumno de un conocimiento organizado.

Al respecto y teniendo en cuenta que los mapas conceptuales fueron concebidos para facilitar la consecución de aprendizajes significativos, es fundamental tener presente la importancia de trabajar con ellos de forma que faciliten aspectos propios de tal tipo de aprendizaje, tales como la relación con los conocimientos previos, la estructuración jerárquica de conceptos, la organización secuencial, la diferenciación progresiva, la reconciliación integradora, etc. (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel).

Además, la diversidad en el grado de generalidad o precisión que puede mostrar un mapa conceptual es de gran ayuda en el proceso de enseñanza. Tal grado viene marcado por el propio grado de generalidad o precisión de los conceptos que lo constituyen. De esta forma, estos pueden ser empleados tanto para la organización del conocimiento correspondiente a una sola sesión, como para la de un curso académico completo.

Uno de los aspectos importantes relativos a la organización del conocimiento que los mapas conceptuales suponen y en relación a la presente investigación, es el estudio de sus posibilidades en la secuenciación de los contenidos incluidos en el mismo.

A este respecto, existe también diversidad de opiniones. Por una parte, se encuentran autores para los que un mapa conceptual no implica secuencia, no considerando siquiera en el aspecto gráfico las flechas asociadas a las líneas que representan las relaciones entre conceptos (Moreira, 2008).

En contraposición y apoyándose en las posibilidades de 'navegación' que posee un mapa conceptual, existen autores para los que se trata de una potente herramienta de secuenciación.

En relación con este último punto de vista, para Salinas, de Benito y Darder (2011) los mapas conceptuales pueden utilizarse como organizadores de secuencias de aprendizaje en lo que se ha denominado 'itinerarios de aprendizaje'.

> *Un itinerario de aprendizaje viene a ser un mapa conceptual que nos guía en el aprendizaje sobre un tema. Presenta una serie de competencias que deben comprenderse, dominarse y demostrarse para entenderlo. A diferencia del mapa conceptual convencional que explica el tema (los conceptos y sus relaciones, el qué de un tema) un itinerario de aprendizaje se ocupa del cómo aprender el tema. Supone, por tanto, una forma de organizar la secuencia de aprendizaje.* (p.68)

Estos autores se apoyan en ciertos aspectos de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel) y la teoría de la elaboración de Reigeluth (véase apartado 3.4. Teoría de la elaboración de Reigeluth), caracterizando un itinerario de aprendizaje por:

- *Constituir un potente organizador tanto de los conceptos, temas, etc., a aprender, como de los objetos de aprendizaje a utilizar.*
- *Dar una visión completa de lo que debe hacerse para comprender el tema en cuestión.*
- *Ofrecer un sistema de navegación flexible:*
    (i) Ofrece opciones o alternativas a seguir en la construcción de la propia secuencia de aprendizaje. El estudiante ajusta la navegación a las características individuales (necesidades, estilo de aprendizaje, etc.)

(ii) Proporciona control al estudiante sobre la secuencia de aprendizaje.

(iii) Constituye lo que se conoce como un mapa de experto.

(Salinas et al., 2011, p.69)

y en su conjunto, como una propuesta flexible de organización de contenidos en el proceso de enseñanza.

Por otro lado, los mapas conceptuales también son de gran utilidad en el proceso de aprendizaje. En este contexto, es de gran importancia la comprensión de un mapa conceptual ya creado, aunque, si cabe, es aún de mayor importancia, la propia elaboración del mismo.

En este sentido, es preciso tener presente que, cuando no es el alumno quien elabora el mapa conceptual, siendo el docente quien lo hace o bien los propios desarrolladores de materiales educativos como los libros de texto, es primordial no utilizar el mapa conceptual como un simple producto acabado, sino llevar a cabo un proceso instruccional que conduzca a la reflexión y a la comprensión del mismo, ya que, en caso contrario, estos pueden convertirse en una simple forma de organizar un contenido a memorizar (Gallegos, 1998).

Con ello, es importante no confundir el simple manejo de los mapas conceptuales, con la consecución directa del aprendizaje significativo en el que están fundamentados. En relación a ello, Rodríguez (2008) dice muy simplemente que "aprendizaje significativo no es el uso de mapas conceptuales [...] los mapas conceptuales [...] son medios para favorecer que el aprendizaje sea significativo y no fines en sí mismos" (p.32-34).

Es por ello por lo que la elaboración de un mapa conceptual por parte del alumno conlleva una serie de ventajas para su aprendizaje, ya que es esta forma la que realmente permite la transformación de la información con la que se trabaja en conocimiento. En cierto sentido, hay que tener presente que la elaboración de un mapa conceptual consiste en realizar una representación externa (el propio mapa conceptual) de la representación interna del conocimiento del propio alumno, esto es, de su estructura cognitiva (Hasemann y Mansfield, 1995).

Además de ello, los mapas conceptuales y muy especialmente su elaboración, son también de gran utilidad como instrumentos o estrategias de evaluación (Williams, 1998; Edmondson, 2000; Salinas, 2010). Dentro de los procesos de evaluación, estos tienen su aplicación tanto en tareas de diagnóstico de conocimientos previos del alumno, como durante y al final de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Incluso en ocasiones se aplican en diferentes procesos de evaluación a lo largo de un periodo de tiempo, todo ello con la finalidad de analizar los cambios conceptuales en el alumno.

Un aspecto importante al respecto de la evaluación mediante mapas conceptuales, es precisamente la elección del método a seguir para la evaluación de los mismos. A este respecto, Azcárate (2007) propone contrastar mapas conceptuales elaborados por diferentes alumnos, analizar las diferentes formas de organización de los contenidos, estudiar qué conceptos y relaciones se incluyen y cuáles no, analizar la buena o mala ubicación de los contenidos así como las buenas o malas relaciones establecidas entre ellos, etc.

Este tipo de métodos suele llevar asociada una evaluación del mapa conceptual de tipo cualitativo, motivo por el que, en ocasiones, resulta muy complicada una valoración objetiva de los mismos. Sin embargo, cabe destacar que existen métodos numéricos de evaluación de mapas conceptuales, basados en la asignación numérica a aspectos de los mapas como los comentados, de forma que estos aportan una valoración cuantitativa mucho más precisa que la cualitativa (Novak y Gowin, 1988; McClure, 1999; Primo, 2000).

Por otra parte y también en relación a la evaluación con mapas conceptuales, cabe destacar que no se puede hablar del mapa conceptual correcto, sino de un mapa conceptual correcto, ya que lo verdaderamente importante de su elaboración es que esta induzca un aprendizaje significativo. Al respecto, Moreira (2008) expone que:

> *Basta pedir a dos profesores, con igual conocimiento, que tracen un mapa de conceptos para cierto contenido: sus mapas tendrán semejanzas y diferencias. Los dos mapas pueden evidenciar una buena comprensión de la materia sin que se pueda decir que uno es mejor que el otro, y mucho menos que uno es cierto y el otro es falso. Esto mismo es válido en relación con los mapas conceptuales trazados por dos alumnos en la evaluación del aprendizaje de un mismo contenido.* (p.7)

En referencia a la riqueza que conlleva esa falta de unicidad en la elaboración de un mapa conceptual, es preciso tener presente las ventajas que aporta el trabajar cooperativamente en la elaboración de mapas conceptuales, entre las que destacan la consecución de un mayor aprendizaje significativo (Preszler, 2004; Salinas, de Benito y García, 2008), sin olvidar la potenciación del pensamiento creativo (Novak y Cañas, 2006).

Por otro lado y en relación con el origen de los mapas conceptuales, estos son también de gran utilidad como instrumentos de organización de la información existente en un determinado documento. Así, por ejemplo, tareas de transcripción de cierta información recogida en un texto sobre un mapa conceptual, son habituales. Con ello, podría afirmarse que los mapas conceptuales son, además, buenas herramientas para la modelización estructural de un texto.

4.2. Redes asociativas pathfinder

Además de la técnica de los mapas conceptuales, existe otra técnica de representación gráfica del conocimiento en relación con la presente investigación: las redes asociativas pathfinder (Schvaneveldt, 1990).

Cabe destacar que esta técnica, proveniente del campo de la inteligencia artificial, está considerada como una de las formas más fiables e innovadoras de representación del conocimiento.

Sus bases se fundamentan principalmente en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (véase apartado 3.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel), si bien algunas investigaciones realizadas con este tipo de técnica han supuesto la formulación de una nueva teoría: la teoría de los conceptos nucleares (Casas, 2002; Casas y Luengo, 2004a, 2005), ofreciendo puntos de vista diferentes a algunas de las ideas de la teoría de Ausubel.

Así, por ejemplo, la organización jerárquica del conocimiento de Ausubel, se convierte en la organización 'geográfica' del conocimiento de la teoría de los conceptos nucleares, los conceptos inclusores en los conceptos nucleares y la complejidad creciente de las estructuras en senderos de coste mínimo.

Conceptualización

Los autores Casas y Luengo (2004b) se refieren a las redes asociativas pathfinder así:

[…] permiten, de forma automatizada, representar de forma gráfica la estructura cognitiva de un sujeto en un área de conocimiento, haciendo uso de la relación que él considera que

existe entre pares de conceptos escogidos dentro de dicha área, y seleccionando, mediante un algoritmo matemático, solo las relaciones más fuertes. (p.60)

Con ello, las redes asociativas pathfinder "permiten no solo hipotetizar acerca de los procesos internos de adquisición y organización del conocimiento, sino obtener representaciones visuales de su estado y evolución" (Luengo y Casas, 2003, p.180).

Los elementos que definen una red asociativa pathfinder son: un conjunto de conceptos y una puntuación numérica que indica la similaridad o distancia semántica percibida por el sujeto en cuestión, entre cada par de conceptos de los que componen la red.

Cabe destacar, al respecto, que una de las dificultades de la definición de una red asociativa pathfinder, es la selección de los conceptos que la constituyen, ya que para ello es preciso tomar decisiones sobre cuáles son los conceptos que deben elegirse y quién es la persona que debe hacerlo.

Representación

La representación gráfica de una red asociativa pathfinder se puede obtener, de forma automática, mediante paquetes de software especializados tales como KNOT[5] (Knowledge Network Organizing Tool), entre otros.

Los conceptos y las relaciones numéricas entre cada par de conceptos que definen la red, se almacenan en una estructura de tipo matriz, siendo un algoritmo, implementado en este programa, quien realiza la representación gráfica de la misma.

Puesto que todos los conceptos que componen una red asociativa pathfinder están relacionados entre sí en mayor o menor medida, lo que realmente hace el algoritmo es extraer las relaciones entre conceptos más significativas, esto es, las relaciones más fuertes. Así, para cada par de conceptos, el algoritmo identifica la secuencia no directa de aquellos que hace que el valor de la métrica de Minkowski sobre los valores numéricos de sus relaciones sea mínimo, no considerando las demás.

[5] http://interlinkinc.net/

Los conceptos se representan entonces inscritos en rectángulos y las relaciones seleccionadas mediante líneas de longitud proporcional al valor numérico de la relación correspondiente.

Cabe destacar, además, que la distribución espacial de los elementos de la red, se realiza mediante el algoritmo 'Spring Embedding' de Kamada y Kawai (1989). Este algoritmo establece las coordenadas de representación gráfica de los conceptos atendiendo a criterios estéticos, tales como: minimizar los cruces entre líneas, evitar el solapamiento de nodos y generar simetrías y equilibrio.

Utilidades

La técnica de redes asociativas pathfinder es de gran utilidad en el campo de la investigación en ámbitos muy diversos. Además de sus posibilidades de análisis de tipo cualitativo, permite también ciertos análisis cuantitativos, ya que los paquetes de software especializados ofrecen algunas opciones tales como: crear una red promedio a partir de otras redes dadas, comparar de forma objetiva la similaridad entre dos redes y disponer de un indicador cuantitativo de coherencia que muestre en qué medida una determinada red es consistente.

Es interesante destacar sus aplicaciones en investigación educativa y, específicamente, en didáctica de la matemática (Casas y Luengo, 1999, 2001). Cabe mencionar al respecto su uso para describir, representar y estudiar procesos mentales relacionados con la adquisición de un concepto concreto y su evolución a lo largo del desarrollo (Casas, 2002; Luengo y Casas, 2003).

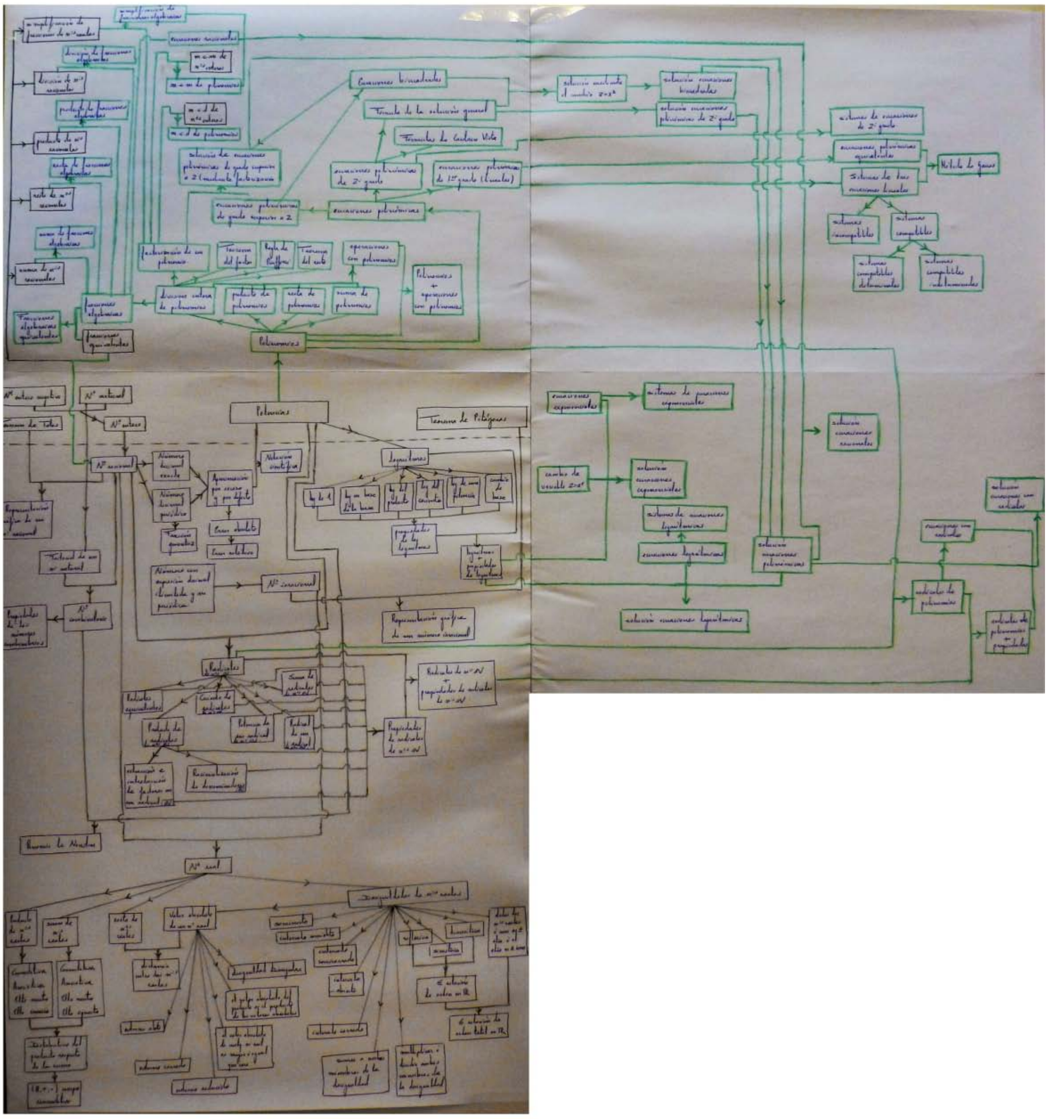
Por otra parte y debido a que en las redes asociativas pathfinder, el establecimiento de las relaciones entre sus conceptos no requiere mayor habilidad cognitiva que el dominio de similaridad, esta técnica puede ser utilizada perfectamente con alumnos de Educación Infantil (Casas, Canchado, Godinho y Verissimo, 2012; Casas, Luengo, Canchado y Torres, 2013) e incluso con personas con limitaciones en su capacidad cognitiva (Bizarro, Luengo, Casas y Torres, 2015).

Uno de los aspectos que suelen destacarse positivamente sobre esta técnica, como método de investigación, es la escasa interferencia en la misma por parte del investigador. Sin embargo, es preciso considerar estas afirmaciones con cautela, ya que, aunque ese aspecto es claramente destacable en algunos de los procesos involucrados, no lo es tanto en otros, como, por ejemplo, en la selección de los conceptos que definen la red, proceso normalmente realizado por el propio investigador.

Este proceso es, por otra parte, altamente complejo, ya que establecer criterios y técnicas para la selección de los conceptos más relevantes de un determinado campo de conocimiento, tal y como suelen caracterizarse los conceptos que definen una red asociativa pathfinder, no es tarea nada sencilla.

Considerado todo lo anterior respecto a técnicas de representación gráfica del conocimiento, cabe mencionar que la primera aproximación de representación gráfica que se realizó para esta investigación, consistió en la modesta representación manual que se muestra en la Figura 6.

Figura 6. Representación gráfica manual de una serie de conceptos y relaciones entre ellos



Se representaron de esa manera un total de 131 conceptos, empleando para ello una superficie de papel de más de $0{,}3\ \mathrm{m}^2$.

Aunque laboriosa y sin posibilidad de aplicación ninguna, la elaboración de tal representación ratificó, desde su comienzo, la importancia de aspectos ya valorados con anterioridad, como la búsqueda de una técnica de representación gráfica adecuada y un software de análisis.

Con ello y teniendo en cuenta que dentro de las técnicas de representación gráfica del conocimiento existentes, los mapas conceptuales y las redes asociativas pathfinder son técnicas asociadas a algunos de los estudios relacionados con la presente investigación (véase Capítulo 5. Revisión de estudios relacionados con esta investigación), se decide ahondar en ellas.

Así, vistas las particularidades de cada una de esas técnicas, se reflexiona en mayor profundidad sobre la importancia del empleo de un software. Un software, que no solamente realice una representación gráfica atendiendo a la estructura de los datos y a criterios estéticos, sino que además ofrezca la posibilidad de llevar a cabo análisis cuantitativos profundos de la estructura de estudio.

CAPÍTULO 5

REVISIÓN DE ESTUDIOS RELACIONADOS CON ESTA INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta la teoría del aprendizaje significativo como uno de los fundamentos teóricos base de esta investigación (véase Capítulo 3. Fundamentación teórica en el contexto del estudio) y la relación existente entre esta, los mapas conceptuales y las redes asociativas pathfinder, como técnicas de representación gráfica del conocimiento (véase Capítulo 4. Representación gráfica del conocimiento), es natural que algunos de los estudios relacionados con la presente investigación, se encuentren fundamentados en este tipo de técnicas.

Redes matemáticas de Brinkmann

En relación a la estructura interna de la matemática como disciplina (véase Capítulo 2. Especificidades de la disciplina matemática en el contexto del estudio), existe un amplio consenso sobre la importancia de percibirla como una red de conceptos y procedimientos relacionados entre sí y no como una colección de reglas y hechos aislados (Brinkmann, 1999, 2001, 2003, 2005).

Precisamente, el mapa conceptual[6], como técnica de representación gráfica del conocimiento, desempeña un papel fundamental en la reflexión sobre esa interconexión matemática, ya que se trata de una técnica adecuada para representar, experimentar, percibir y aprender la estructura en red de la matemática (Brinkmann, 1999, 2003; Mwakapenda y Adler, 2003; Brinkmann, 2005).

A este respecto, Brinkmann (2001) propone una modelización matemática de esta idea de red mediante un grafo, de forma que los objetos matemáticos de la red, tales como conceptos, definiciones, teoremas, demostraciones, algoritmos, etc., se correspondan con los vértices del grafo y la dependencia entre cada dos de sus objetos por las aristas del mismo[7].

En relación al tipo de dependencia entre objetos, Brinkmann advierte además la existencia de un amplio abanico de posibilidades. Este hecho lo ejemplifica analizando algunos objetos relacionados con el teorema de Pitágoras y estudiando el tipo de dependencia existente entre ellos.

El listado de objetos matemáticos que analiza corresponde a: *demostración del teorema de Pitágoras, ángulo recto, triángulo rectángulo, cateto de un triángulo rectángulo, hipotenusa, cuadrado, cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo, cuadrado de la hipotenusa, a, b, c,* a^2, b^2, c^2 *y* $a^2 + b^2 = c^2$, para los que detecta diferentes tipos de relaciones.

Así, por ejemplo, encuentra relaciones de deducción, debido al hecho de que el *teorema de Pitágoras* solamente es aplicable a *triángulos rectángulos*, relaciones de subconjunto o parte-todo, ya que, por ejemplo, el *cuadrado de la hipotenusa* o el *cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo*, son parte del *teorema de Pitágoras*, relaciones de pertenencia, puesto que la demostración del teorema de Pitágoras pertenece al teorema de Pitágoras, relaciones relativas a la aplicabilidad del teorema, debido a que, por ejemplo, $a^2 + b^2 = c^2$ es una modelización algebraica del teorema, pudiendo ser aplicada para el cálculo de distancias, etc.

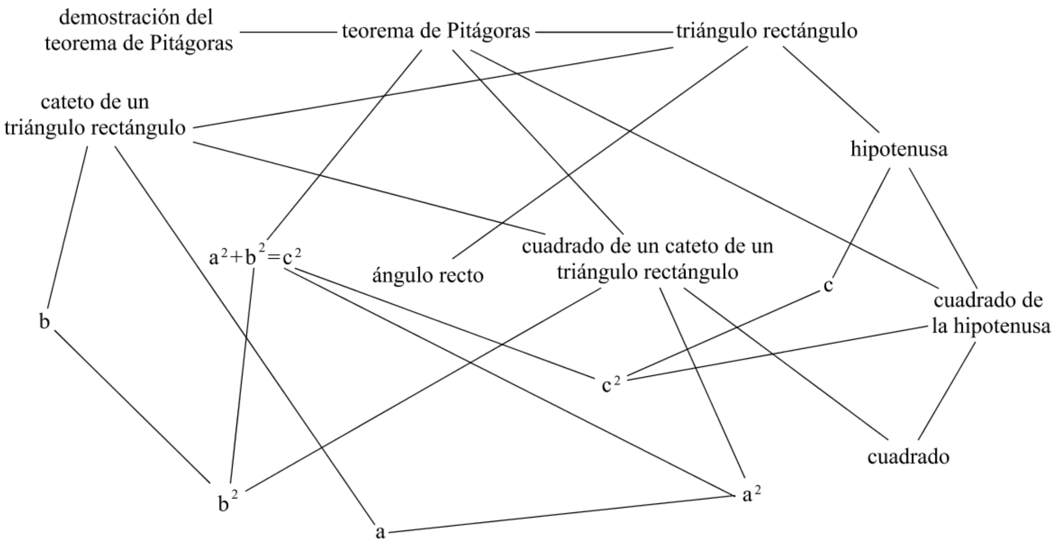
Una representación gráfica de los objetos matemáticos estudiados y las relaciones entre ellos, se muestra en la Figura 7.

---

[6] Brinkmann (2003) destaca también al respecto, la importancia de los mapas mentales.

[7] Para una definición matemática de grafo véase el apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos.

Figura 7. Red matemática relativa al teorema de Pitágoras



Fuente: figura modificada a partir de Brinkmann (2001, p.8)

Brinkmann propone así una clasificación generalizada relativa a la posible tipología de relaciones entre objetos matemáticos. Tal clasificación la divide en dos grandes grupos, considerando, por un lado, relaciones en función de la sistemática de la materia y, por otro lado, en función de las aplicaciones de los objetos matemáticos. Con ello, para cada uno de esos dos grupos, plantea la categorización que se muestra en la Tabla 19.

Tabla 19. Una clasificación de la tipología de relaciones entre objetos matemáticos propuesta por Brinkmann

Relaciones en función de las sistemática de la materia	Relaciones de inclusión: entre una característica de un objeto matemático y el propio objeto.
	Relaciones de deducción: entre un objeto matemático y otro deducido a partir de este.
	Relaciones de pertenencia: tales como las relaciones entre un teorema y su demostración, un problema y su solución, etc.
Relaciones en función de las aplicaciones de los objetos matemáticos	Relaciones modelo: entre dos representaciones distintas de un mismo objeto matemático, por ejemplo, una representación algebraica y una geométrica.
	Relaciones teorema: entre un problema matemático y un teorema adecuado para su solución.
	Relaciones secuencia: entre dos pasos consecutivos en la aplicación de un algoritmo.

Fuente: traducción desde Brinkmann (2001, p.10)

En relación a ello, Brinkmann menciona un posible proceso de modelización de la información de un texto mediante un grafo, pero, sin embargo, no aporta gran detalle al respecto.

En relación a los objetos matemáticos a representar como vértices del grafo en cuestión, únicamente sugiere la elección de aquellos conceptos que se consideren de mayor importancia, proceso para el que no sugiere ningún criterio. Únicamente, advierte la importancia, para la claridad en la representación, de no considerar una cantidad de conceptos que supere en demasía los 25.

Además, en relación al establecimiento de relaciones entre tales conceptos, sugiere tener en cuenta su propia clasificación (véase Tabla 19), sin aportar, por otra parte, la forma precisa de llevar a cabo tal proceso.

De acuerdo a ello, la consecuencia de tal modelización, se corresponde con un grafo con un número muy reducido de conceptos matemáticos, entre los que se establecen relaciones de diferente índole.

Cabe destacar que, a pesar de hacer la propuesta del uso de un grafo para modelizar la estructura de red propia de la matemática atendiendo a una serie de relaciones, esta autora no profundiza en ella, considerando en su lugar, únicamente, las ventajas que proporciona el uso de los mapas conceptuales en la educación matemática (Brinkmann, 1999).

Los estudios de Brinkmann en esta línea hacen hincapié en la importancia de percibir la estructura de la disciplina matemática como una estructura interconectada en forma de red. Esta visión altamente consensuada, como afirma la propia autora, coincide con el punto de partida de la presente investigación, ya que una estructura con estas características, no solo se presta a su análisis, sino que es de reflexión obligada para todo investigador en educación matemática.

De acuerdo con esa necesidad de investigación sobre la estructura en red de la matemática, esta autora realiza una importante simbiosis entre el mapa conceptual y uno de los elementos clave de la presente investigación, el grafo. Esta simbiosis consiste en su propuesta de representación gráfica mediante el uso de mapas conceptuales y su modelización teórica mediante grafos.

A este respecto, cabe aclarar que esta simbiosis no se trata de una transcripción directa de un mapa conceptual en un grafo. Autores como Primo (2000), destacan la idea de mapa conceptual visto como un grafo, donde los conceptos del mapa conceptual se representan mediante nodos y las proposiciones se representan mediante aristas, provistas de etiquetas que caracterizan el tipo de relación entre los nodos. Sin embargo, tal transcripción, aunque sencilla, podría no ser de gran utilidad en el ámbito de la investigación.

Mapas de experto tridimensionales

Partiendo también de la idea de mapa conceptual y con la finalidad de proporcionar una herramienta didáctica que facilite al docente la selección, organización y secuenciación de contenidos curriculares, el grupo Orión[8] de Investigación en Óptica y Didáctica de la Física de la Universidad de Extremadura, desarrolla el concepto de mapa de experto tridimensional (Pérez et al., 2000a). Concepto basado, por un lado, en los mapas de experto (mapas conceptuales, mapas procedimentales, mapas de razonamiento) y, por otro lado, en la ampliación del concepto general de mapa conceptual a mapa conceptual tridimensional, incorporando al mismo, una tercera dimensión.

El concepto de mapa de experto tridimensional, se fundamenta así, en la teoría de la elaboración de Reigeluth (véase apartado 3.4. Teoría de la elaboración de Reigeluth), de forma que el mapa de experto aporta la posibilidad de tratar mayor variedad de contenidos, además de los puramente conceptuales y la tercera dimensión, la posibilidad de establecer diferentes niveles de elaboración correspondientes a una secuencia de aprendizaje. Con ello, el grupo presenta el mapa de experto tridimensional como herramienta didáctica que operativiza la aplicación de la teoría de la elaboración.

En particular, el grupo realiza su aplicación en la selección, organización y secuenciación de contenidos del área de Física en Educación Secundaria (Pérez et al., 1998; Pérez, Suero, Montanero y Montanero, 2000b, 2000c; Pérez, Suero, Montanero, Pardo y Montanero, 2001) y, en concreto, en materias como Termodinámica, Óptica (Gil, Suero y Pérez, 2004), Dinámica (Pérez, 1998) y Electricidad (Pérez, Suero, Pardo y Montanero, 2006).

[8] http://grupoorion.unex.es/

Con ello presenta una propuesta de aplicación docente de la teoría de la elaboración de Reigeluth, complementándola y adaptándola a las particularidades de la física. Así, justificando la importancia de la observación de los fenómenos físicos en el aprendizaje de la física, propone la utilización de los mismos como contenido organizador cuando se aplique la teoría de la elaboración a la enseñanza de esta disciplina (Suero, Montanero y Montanero, 1999).

Para ello hace uso del programa CmapTools (Cañas et al., 2004; Novak y Cañas, 2006) (véase apartado 4.1. Mapas conceptuales), ya que la posibilidad de conexión entre diferentes mapas conceptuales que este ofrece, permite la simulación de los niveles de elaboración propios de esta teoría (Pérez, Suero, Montanero y Pardo, 2004).

Los estudios de este grupo permiten así, mediante la creación del concepto de mapa de experto tridimensional, la aplicación de la teoría de la elaboración de Reigeluth para su principal propósito de selección, organización y secuenciación de contenidos. Con ello podría afirmarse, con las oportunas salvedades, que es el mapa conceptual quien conduce hacia una posible puesta en práctica de la teoría de la elaboración.

De hecho, la propuesta de Rico et al. (2008) dentro de la planificación docente del sistema de los números naturales y en el contexto de la selección, organización y secuenciación, roza, aunque muy tangencialmente, la aplicación de la teoría de la elaboración de Reigeluth, haciendo uso únicamente de los mapas conceptuales.

Proponen para ello la realización de mapas conceptuales centrados en conceptos básicos de aquello que se pretenda enseñar. Así, tras la elaboración de mapas conceptuales específicos para cada uno de los conceptos básicos, proponen la determinación de mapas conceptuales conjuntos, en los que todos ellos tengan cabida.

Por todo ello y sin olvidar que dicha teoría constituye un importante fundamento teórico para la presente investigación, parecería primordial tener presente esta técnica de representación gráfica del conocimiento.

Sin embargo, partiendo de su utilidad como posible técnica de investigación (véase apartado 4.1. Mapas conceptuales), se ha encontrado un factor clave que dificulta la aplicación de esta técnica en el presente estudio. Así, hechos habituales relacionados con el sistema de proposiciones de los mapas conceptuales, tales como que aparezcan involucrados más de dos conceptos en una misma proposición o que el número de conceptos implicados sea variable de unas proposiciones a otras, conllevan dificultades en procesos de codificación numérica y análisis cuantitativo.

Teniendo en cuenta entonces que uno de los propósitos de esta investigación es el análisis de la estructura interna de una parte de la matemática y, de acuerdo con la simbiosis mencionada anteriormente entre el mapa conceptual como técnica para su representación y el grafo como instrumento para su modelización, se decide optar por este último como elemento clave de investigación.

Elementos principales de la teoría de los conceptos nucleares

En relación con las redes asociativas pathfinder (véase apartado 4.2. Redes asociativas pathfinder) y con la finalidad de caracterizar la estructura cognitiva mediante el estudio de cómo se adquiere y organiza el conocimiento, surge la teoría de los conceptos nucleares (Casas, 2002; Casas y Luengo, 2004a, 2005).

En relación con la presente investigación, caben destacar tres aspectos de esta teoría: la organización ‘geográfica’ del conocimiento, los conceptos nucleares y los senderos de mínimo coste.

La organización ‘geográfica’ del conocimiento pretende explicar que el aprendizaje se realiza de forma que, partiendo de unos determinados conceptos significativos para el alumno, estos se van relacionando hasta conseguir una comprensión global de todo el conocimiento objeto de estudio. El término ‘geográfica’ indica la analogía con el proceso de dominio de un entorno físico, en el que se comienza con la atención en unos ciertos elementos significativos del entorno, se continúa con el aprendizaje de ‘rutas’ entre tales elementos y se termina con una visión y dominio global de todo el entorno.

Esta teoría, describe así la organización de la estructura cognitiva, en contraposición a una organización jerárquica de la misma.

Esos conceptos significativos para el alumno son lo que sus autores denominan ‘conceptos nucleares’, conceptos en base a los que se va generando el nuevo conocimiento, sin necesidad de corresponder, tal y como se ha visto que otras teorías proponen, con aquellos conceptos ni más generales, ni más específicos.

Por otro lado y en relación a esa organización 'geográfica' del conocimiento a partir de los conceptos nucleares, la teoría contempla un tercer elemento importante: los senderos de mínimo coste.

En contraposición al hecho de que la complejidad de la estructura cognitiva aumenta a medida que se adquiere una mayor cantidad de conceptos, esta teoría respalda que se utilizan subestructuras cada vez más simples. Afirma así, que cuando una situación lo requiere, en lugar de atender a todos los conceptos de la estructura cognitiva, solamente se recurre a aquellas relaciones más simples y significativas, relaciones que constituyen lo que los autores han denominado senderos de mínimo coste.

Con todo ello, estos tres elementos principales de la teoría de los conceptos nucleares, aplicable al estudio de estructuras cognitivas, encuentran su homólogo en la presente investigación para el estudio de la estructura interna que conforman los conceptos que definen una disciplina, la disciplina matemática.

Por otro lado, de la misma forma que las redes asociativas pathfinder y un software especializado son esenciales para la formulación de tal teoría y el estudio de los tres elementos mencionados, los grafos y un software especializado permiten en el presente estudio la identificación de conceptos clave, el análisis de posibles caminos entre conceptos y una representación gráfica de los mismos, acorde a la estructura interna de la disciplina sobre la que se aplica.

Todo ello indica una interesante asociación entre dos estudios que, aunque relacionados ambos con el conocimiento, lo hacen desde puntos de vista bien diferentes y aparentemente muy distanciados.

Generación automática de itinerarios docentes e-learning mediante técnicas de análisis e indexación de contenidos

En el contexto de la e-formación o e-learning, los autores Alarcón, Fernández, González y Martínez (2007) proponen un sistema basado en web LCMS (Learning Content Management System) que, utilizando técnicas de análisis e indexación de contenidos, sea capaz de generar 'itinerarios docentes' de forma automática.

Partiendo de que los contenidos se almacenan como objetos totalmente identificables, los autores proponen, en primer lugar, una selección de los mismos en base a criterios tales como: los más utilizados, los mejor valorados, los más recientes, etc. Al respecto, los autores advierten, además, que tales 'objetos docentes' deben entenderse como algo similar a artículos de Wikipedia[9].

Para la propuesta de determinación de 'itinerarios docentes', transcriben el problema mediante un grafo dirigido ponderado[10], en el que los nodos del mismo se corresponden con los 'objetos docentes' y los arcos con relaciones entre los mismos, indicando la necesidad de examinar con anterioridad un determinado 'objeto docente' frente a otro. La determinación de tales arcos se realiza atendiendo al estudio en los 'objetos docentes' de palabras clave, definiciones, referencias bibliográficas, referencias a otros objetos, etc.

Por otro lado, teniendo en cuenta que el objetivo principal de la propuesta se define como generar 'itinerarios docentes' en respuesta a las necesidades de un usuario y partiendo de la contextualización de la misma, es preciso tener muy presente el dinamismo que ello supone, siendo este el principal motivo por el que en lugar de hacer uso para su consecución de la lógica formal ordinaria (Booleana), se propone emplear la lógica difusa.

Así, para la determinación del antecesor y sucesor más adecuado a un determinado 'objeto docente', proponen una serie de reglas difusas y definen, a partir de ellas, un operador que indica su grado de pertenencia como antecesor o sucesor para el resto de 'objetos docentes'.

Algunas de esas reglas difusas para la determinación de antecesores consisten en, partiendo de A, B, C como 'objetos docentes', considerar que A es antecesor de B si B hace algunas referencias a A en su bibliografía, si B utiliza para sus definiciones bastantes términos definidos en A, si A ha sido utilizado más veces como antecesor de B, etc.

Los autores lo ilustran con un sencillo ejemplo relativo a la aritmética de los números naturales. Así, si se parte de tres 'objetos docentes' en los que en uno se enseña a sumar y restar a partir de las siguientes definiciones:

[9] https://es.wikipedia.org

[10] Para una definición matemática de grafo dirigido y grafo ponderado, véase el apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos.

Sumar: dados dos conjuntos disjuntos X e Y, cuyos cardinales son x e y respectivamente, se define la suma de x e y como el cardinal del conjunto Z unión de X e Y.

Restar dos números x e y es calcular otro número z cuya suma con y dé x.

En otro se enseña a multiplicar y dividir números naturales:

Multiplicar consiste en, dados dos números, sumar el primero de ellos (multiplicando) consigo mismo tantas veces como indique el segundo (multiplicador).

Dividir consiste en dados dos números calcular cuantas veces (cociente) se puede restar el segundo de ellos (divisor) del primero de ellos (dividendo), mientras lo restante siga siendo mayor que el divisor, hasta que no lo sea y quede el resto.

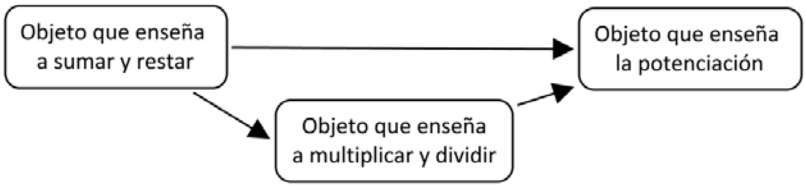
Y en otro se enseña la potenciación:

Elevar un número (base) a otro (exponente) consiste en multiplicar consigo mismo al primero tantas veces como indique el segundo.

El establecimiento de antecesores y sucesores de 'objetos docentes' se realizaría atendiendo a que el 'objeto docente' que enseña a sumar y restar, es antecesor del que enseña a multiplicar y dividir, siendo este antecesor a su vez, del que enseña la potenciación y sucesor del que enseña a sumar y multiplicar, tratándose pues la multiplicación y división de contenidos intermedios entre la suma y resta y la potenciación.

El carácter ponderado del grafo en cuestión, se debe a que a sus arcos se les asignan pesos dependiendo de las distancias existentes entre los objetos. Así, en el ejemplo mencionado, la distancia entre el objeto que enseña a sumar y restar y el objeto que enseña la potenciación, será mucho mayor que la distancia de ambos al objeto que enseña a multiplicar y dividir. Una representación gráfica del grafo obtenido para este ejemplo, se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Ejemplo de grafo de objetos docentes



Fuente: elaboración propia a partir de Alarcón et al. (2007)

Concretamente, el cálculo final para el valor de las distancias entre objetos, viene determinado a través de unos parámetros en los que interviene, entre otros, el conjunto de palabras definidas en el objeto, el conjunto de las palabras clave, etc.

Así, para el ejemplo concreto que se viene desarrollando, el conjunto de palabras definidas en el objeto sumar y restar, corresponde al formado por sumar y restar; el de multiplicar y dividir, a multiplicar y dividir; y el de potenciación, a potenciación. Por otra parte, el conjunto de palabras clave para el objeto referente a sumar y restar, corresponde al formado por conjunto, cardinal y unión; el de multiplicar y dividir, a sumar, restar y conjunto; y el de potenciación, a multiplicar, base y exponente (conceptos subrayados en la definición de los objetos).

Una vez representado el problema mediante el grafo definido de esta forma, los autores proponen en este punto trabajar con algoritmos de recorrido de grafos que permitan la consecución de 'itinerarios docentes' en el mismo.

Cabe destacar que uno de los problemas que los propios autores prevén para la determinación de 'itinerarios docentes', es la posibilidad de existencia de bucles[11] en el grafo así definido.

Con todo lo anterior y en relación a la presente investigación, cabe destacar la similitud en el uso de un grafo para la consecución de un objetivo común relativo a la identificación de determinados recorridos en el mismo.

Sin embargo y aunque en un contexto también educativo, es preciso percibir las diferencias que conlleva tanto el tratamiento de fuentes online propias de la propuesta descrita, frente a las fuentes escritas características de la presente investigación, así como el empleo de teorías bien diferentes, la teoría de lógica difusa por un lado y la teoría de grafos por otro.

No dejar de resaltar por otra parte, el carácter de propuesta de lo aquí descrito, frente a la propuesta, desarrollo y aplicación llevada a cabo en la presente investigación.

[11] Para una definición matemática de bucle, véase el apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos.

CAPÍTULO 6

NOCIONES BÁSICAS SOBRE TEORÍA DE GRAFOS

En este capítulo se hace referencia a la base teórica de la teoría de grafos que fundamenta el tipo específico de grafo y metodología empleados en esta investigación. Es preciso mencionar que no se incluyen las demostraciones de los resultados considerados, ya que estas pueden encontrarse fácilmente en bibliografía referente a teoría de grafos (Kaufmann, 1976; Wilson, 1983; Abellanas y Lodares, 1990; Lipschutz, 1993; Harary, 1994; Bollobás, 1998; Tutte, 2001; West, 2001; García, López y Puigjaner, 2002; Biggs, 2003; Cirre, 2004; Chartrand y Zhang, 2005; Gross y Yellen, 2005; Kocay y Kreherv, 2005; Merayo, 2005; Balakrishnan y Ranganathan, 2012).

6.1. Terminología de teoría de grafos

Para ello se definen, en primer lugar, nociones básicas de teoría de grafos y se mencionan algunos de los principales resultados de la misma.

Es preciso tener en cuenta que no existe en teoría de grafos una nomenclatura generalmente aceptada, por lo que se advierte que puede encontrarse en otros documentos terminología diferente a la empleada en este estudio.

Definiciones básicas

Grafo.- Un grafo es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados nodos o vértices y E es una familia finita de pares de elementos de V llamados aristas. Los elementos de E se denotan $[u, v]$ con $u, v \in V$. Ambos elementos, u y v del par, se llaman extremos de la arista $[u, v]$.

Se emplea la notación V_G y E_G, en lugar de V y E (respectivamente), en el caso de existir riesgo de confusión respecto al grafo al que se hace referencia.

Digrafo.- Un digrafo, grafo dirigido o grafo orientado es un grafo $G = (V, A)$ donde A es una familia finita de pares ordenados de elementos de V llamados arcos, aristas orientadas o di-aristas. Los elementos de A se denotan (u, v) con $u, v \in V$.

El primer elemento del par ordenado, u, se llama nodo origen del arco o predecesor directo de v, mientras que el segundo elemento, v, se llama nodo destino del arco o sucesor directo de u.

Se emplea la notación V_G y A_G, en lugar de V y A (respectivamente), en el caso de existir riesgo de confusión respecto al digrafo al que se hace referencia.

Grafo (digrafo) ponderado o con pesos.- Un grafo (digrafo) ponderado o grafo (digrafo) con pesos es un grafo $G = (V, E)$ (digrafo $G = (V, A)$), en el que cada arista (arco) tiene asignado un valor real o peso.

Conjunto de sucesores directos de un nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y $u \in V$, se define el conjunto de sucesores directos del nodo u en el digrafo $G = (V, A)$ y se denota por $SD_G(u)$ al conjunto:

$$SD_G(u) = \{v \in V/(u, v) \in A\}$$

Conjunto de predecesores directos de un nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y $u \in V$, se define el conjunto de predecesores directos del nodo u en el digrafo $G = (V, A)$ y se denota por $PD_G(u)$ al conjunto:

$$PD_G(u) = \{v \in V/(v, u) \in A\}$$

Orden de un grafo.- Se llama orden de un grafo $G = (V, E)$ al número de nodos que posee, esto es, al cardinal de su conjunto de nodos.

Tamaño de un grafo.- Se llama tamaño de un grafo $G = (V, E)$ al número de aristas que posee, esto es, al cardinal de su conjunto de aristas.

Tamaño de un digrafo.- Se llama tamaño de un digrafo $G = (V, A)$ al número de arcos que posee, esto es, al cardinal de su conjunto de arcos.

Nodos adyacentes en un grafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo, se dice que dos nodos $u, v \in V$son adyacentes si $[u, v] \in E$, es decir, si el grafo posee una arista de extremos u y v.

Nodos adyacentes en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, se dice que dos nodos $u, v \in V$ son adyacentes si $(u, v) \in A$ o bien $(v, u) \in A$.

Aristas múltiples.- Sea $G = (V, E)$ un grafo, dos aristas $[u, v], [w, z] \in E$ se dice que son múltiples si el conjunto formado por los nodos u y v coincide con el conjunto de nodos w y z, es decir, si ambas poseen los mismos extremos.

Arcos múltiples.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, dos arcos $(u, v), (w, z) \in A$ se dice que son múltiples si $u = w$ y $v = z$, es decir, si ambos poseen el mismo nodo origen y el mismo nodo destino.

Bucle en un grafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo, un bucle o lazo es una arista $[u, v] \in E$ que verifica que $u = v$, es decir, una arista en la que sus extremos coinciden.

Bucle en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, un bucle o lazo es un arco $(u, v) \in A$ que verifica que $u = v$, es decir, un arco en el que su nodo origen coincide con su nodo destino.

Grafo simple.- Sea $G = (V, E)$ un grafo, se dice que es simple si no posee ni bucles ni aristas múltiples.

Digrafo simple.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, se dice que es simple si no posee ni bucles ni arcos múltiples.

Multigrafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo, se dice que es un multigrafo si posee bucles y/o aristas múltiples.

Multidigrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, se dice que es un multidigrafo o digrafo múltiple si posee bucles y/o arcos múltiples.

Partición de un grafo.- Una partición de un grafo $G = (V, E)$ es una partición de su conjunto de nodos, esto es una familia finita de subconjuntos no vacíos de V, $P = \{V_i / i = 1, \dots, r\}$ que verifican que $V_i \cap V_j = \emptyset \ \ \forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ con $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{r} V_i = V$.

Caminos y conceptos relacionados

Camino.- Un camino en un grafo $G = (V, E)$ de un nodo u a un nodo v es una sucesión alternada de nodos y aristas de $G = (V, E)$, $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 1$ donde $e_k = [v_{k-1}, v_k] \in E$ para $1 \leq k \leq p$.

Camino dirigido.- Un camino dirigido en un digrafo $G = (V, A)$ de un nodo u a un nodo v es una sucesión alternada de nodos y arcos de $G = (V, A)$, $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ donde $a_k = (v_{k-1}, v_k) \in A$ para $1 \leq k \leq p$.

Nodos extremos de un camino.- Sea $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 1$ un camino en un grafo $G = (V, E)$. Los nodos extremos del camino son los nodos u y v.

Nodos extremos de un camino dirigido.- Sea $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ un camino dirigido en un digrafo $G = (V, A)$. Los nodos extremos del camino dirigido son los nodos u y v, donde u es el nodo origen y v es el nodo destino.

Nodos interiores de un camino.- Sea $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 1$ un camino en un grafo $G = (V, E)$. Los nodos interiores del camino son los nodos $\{v_1, \dots, v_{p-1}\}$.

Nodos interiores de un camino dirigido.- Sea $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ un camino dirigido en un digrafo $G = (V, A)$. Los nodos interiores del camino dirigido son los nodos $\{v_1, \dots, v_{p-1}\}$.

Conjunto de sucesores o espectro transitivo de un nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y $u \in V$. Se define el conjunto de sucesores del nodo u en el digrafo $G = (V, A)$ o espectro transitivo del nodo u, denotado $S_G(u)$, al conjunto:

$$S_G(u) = \{v \in V / \exists\ u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$$

$$/\ v_i \in V, i = 0, \dots, p,\ a_j = (v_{j-1}, v_j) \in A, j = 1, \dots, p, p \geq 1\}$$

Obsérvese que, si en la definición anterior se sustituye p por 1 se tiene que $S_G(u) = SD_G(u)$ (véase definición de conjunto de sucesores directos de un nodo en un digrafo), por lo que $S_G(u)$ contiene a $SD_G(u)$.

Conjunto de predecesores o espectro transitivo inverso de un nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y $u \in V$, se define el conjunto de predecesores del nodo u en el digrafo $G = (V, A)$ o espectro transitivo inverso del nodo u, denotado $P_G(u)$, al conjunto:

$$P_G(u) = \{v \in V / \exists\ v = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = u$$

$$/\ v_i \in V, i = 0, \dots, p,\ a_j = \left(v_{j-1}, v_j\right) \in A, j = 1, \dots, p, p \geq 1\}$$

Obsérvese que, si en la definición anterior se sustituye p por 1 se tiene que $P_G(u) = PD_G(u)$ (véase definición de conjunto de predecesores directos de un nodo en un digrafo), por lo que $P_G(u)$ contiene a $PD_G(u)$.

Camino cerrado.- Un camino $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p > 1$ en un grafo $G = (V, E)$ se dice que es cerrado si $u = v$.

Camino cerrado dirigido.- Un camino dirigido $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p > 1$ en un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es cerrado si $u = v$.

Camino simple.- Un camino $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 1$ en un grafo $G = (V, E)$ se dice que es simple si $e_i \neq e_j\ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Camino simple dirigido.- Un camino dirigido $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ en un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es simple si $a_i \neq a_j\ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Camino elemental.- Un camino $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v, p \geq 1$ en un grafo $G = (V, E)$ se dice que es elemental si $e_i \neq e_j\ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ y $v_i \neq v_j\ \ \forall i, j \in \{0, \dots, p\}$.

Camino elemental dirigido.- Un camino dirigido $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ en un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es elemental si $a_i \neq a_j\ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ y $v_i \neq v_j\ \ \forall i, j \in \{0, \dots, p\}$.

Circuito.- Un camino $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 1$ en un grafo $G = (V, E)$ se dice que es un circuito si es un camino simple y cerrado, esto es, si $e_i \neq e_j\ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ y $u = v$.

Obsérvese que cuando $p = 1$, el circuito es un bucle (véase definición de bucle en un grafo), por lo que el concepto de bucle en un grafo puede también definirse como un circuito con una sola arista.

Circuito dirigido.- Un camino $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ en un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es un circuito dirigido si es un camino simple dirigido y cerrado, esto es, si $a_i \neq a_j \ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ y $u = v$. Obsérvese que cuando $p = 1$, el circuito dirigido es un bucle (véase definición de bucle en un digrafo), por lo que el concepto de bucle en un digrafo puede también definirse como un circuito dirigido con un solo arco.

Ciclo.- Un camino $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 3$ en un grafo $G = (V, E)$ se dice que es un ciclo si es un camino elemental y cerrado, esto es, si $e_i \neq e_j \ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $v_i \neq v_j \ \ \forall i, j \in \{0, \dots, p\}$ y $u = v$.

Ciclo dirigido.- Un camino $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v$, $p \geq 3$ en un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es un ciclo si es un camino elemental dirigido y cerrado, esto es, si $a_i \neq a_j \ \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $v_i \neq v_j \ \ \forall i, j \in \{0, \dots, p\}$ y $u = v$.

Digrafo simétrico.- Un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es simétrico si para cada $(u, v) \in A$ se tiene que $(v, u) \in A$.

Digrafo antisimétrico.- Un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es antisimétrico si para todo $(u, v) \in A$ se tiene que $(v, u) \notin A$. Obsérvese que de la propia definición se deduce que un digrafo antisimétrico no posee bucles (véase definición de bucle en un digrafo).

Grafo transitivo.- Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es transitivo si para cualquier par de nodos $u, v \in V$ no necesariamente distintos, se tiene que $[u, v] \in E$ siempre que exista un camino en $G = (V, E)$ con nodos extremos u y v.

Digrafo transitivo.- Un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es transitivo si para cualquier par de nodos $u, v \in V$ no necesariamente distintos, se tiene que $(u, v) \in A$ siempre que exista un camino dirigido en $G = (V, A)$ con nodo origen u y nodo destino v.

Grafos conexos y subgrafos

Grafo conexo.- Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es conexo si $\forall\, u, v \in V$ existe un camino (véase definición de camino) en el grafo $G = (V, E)$ de extremos u y v. En caso contrario se dice que el grafo es no conexo o disconexo.

Digrafo conexo.- Un digrafo $G = (V, A)$ se dice que es conexo si $\forall\, u, v \in V$ existe un camino dirigido (véase definición de camino dirigido) en el digrafo $G = (V, A)$ de nodo origen u y nodo destino v o bien existe un camino dirigido en el digrafo $G = (V, A)$ de nodo origen v y nodo destino u. En caso contrario se dice que el digrafo es no conexo o disconexo.

Subgrafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo, un par $G_1 = (V_1, E_1)$ se dice que es un subgrafo del grafo $G = (V, E)$ si es un grafo y verifica que $\phi \neq V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$.

Subgrafo dirigido.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, un par $G_1 = (V_1, A_1)$ se dice que es un subgrafo del digrafo $G = (V, A)$ si es un digrafo y verifica que $\phi \neq V_1 \subseteq V$ y $A_1 \subseteq A$.

Grado de un nodo

Grado de un nodo en un grafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo y $u \in V$. Se llama grado de u en el grafo $G = (V, E)$ y se representa por $gr_G(u)$, al cardinal del conjunto $\{v \in V/[u, v] \in E\}$.

Grado de un nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y $u \in V$. Se llama grado de u en el digrafo $G = (V, A)$ y se representa por $gr_G(u)$, al cardinal del conjunto $\{v \in V/(u, v) \in E \text{ ó } (v, u) \in E\}$.

Puesto que los elementos de A son pares ordenados, en un digrafo cabe destacar dos tipos de grado de un nodo. Así, sea $G = (V, A)$ un digrafo y $u \in V$:

Se llama *grado de entrada* de u en el digrafo $G = (V, A)$ y se representa por $gr_G^-(u)$, al cardinal del conjunto $\{v \in V/(v, u) \in A\}$, es decir:

$$gr_G^-(u) = card(\{v \in V/(v, u) \in A\})$$

Y se llama *grado de salida* de u en el digrafo $G = (V, A)$ y se representa por $gr_G^+(u)$, al cardinal del conjunto $\{v \in V/(u, v) \in A\}$, es decir:

$$gr_G^+(u) = card(\{v \in V/(u,v) \in A\})$$

Obsérvese que se verifica $gr_G(u) = gr_G^-(u) + gr_G^+(u)$.

Nodo aislado de un grafo.- Sea $G = (V,E)$ un grafo y $u \in V$. Se dice que el nodo u es aislado en el grafo $G = (V,E)$ si $gr_G(u) = 0$.

Nodo aislado de un digrafo.- Sea $G = (V,A)$ un digrafo y $u \in V$. Se dice que el nodo u es aislado en el digrafo $G = (V,A)$ si $gr_G(u) = 0$.

Nodo fuente.- Sea $G = (V,A)$ un digrafo y $u \in V$. Se dice que el nodo u es un nodo fuente si $gr_G^-(u) = 0$ y $gr_G^+(u) > 0$.

Nodo sumidero.- Sea $G = (V,A)$ un digrafo y $u \in V$. Se dice que el nodo u es un nodo sumidero si $gr_G^-(u) > 0$ y $gr_G^+(u) = 0$.

Grado medio de un grafo (digrafo).- Sea $G = (V,E)$ un grafo (respectivamente un digrafo $G = (V,A)$), se define su grado medio y se denota por $gr(G)$ a la media del grado de los nodos que lo constituyen, es decir:

$$gr(G) = \frac{1}{card(V)} \sum_{u \in V} gr_G(u)$$

Distancias

Longitud de un camino.- Sea $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_p, v_p = v,\ p \geq 1$ un camino en un grafo $G = (V,E)$. La longitud del camino es p, es decir, el número de aristas que posee la sucesión que lo define.

Longitud de un camino dirigido.- Sea $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_p, v_p = v$, $p \geq 1$ un camino dirigido en un digrafo $G = (V,A)$. La longitud del camino es p, es decir, el número de arcos que posee la sucesión que lo define.

Nodo n-accesible desde otro nodo en un grafo.- Sea $G = (V,E)$ un grafo, $n \in \mathbb{N}$ y $u, v \in V$ se dice que v es n-accesible en el grafo desde u si existe un camino $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n = v$, es decir, si existe un camino de longitud n de extremos u y v.

Nodo n-accesible desde otro nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo, $n \in \mathbb{N}$ y $u, v \in V$ se dice que v es n-accesible en el digrafo desde u si existe un camino dirigido $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n = v$, es decir, si existe un camino dirigido de longitud n con nodo origen u y nodo destino v.

Distancia entre dos nodos en un grafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $u, v \in V$, se define la distancia entre u y v y se denota por $d(u, v)$ como la mínima longitud de todos los caminos en $G = (V, E)$ de extremos los nodos u y v. Obsérvese que $d(u, v) = d(v, u)\ \forall\ u, v \in V$.

En caso de que no exista ningún camino en $G = (V, E)$ de extremos u y v, la distancia entre ambos nodos se define como $d(u, v) = \infty$. Obsérvese que este caso solamente es posible si $G = (V, E)$ no es un grafo conexo (véase definición de grafo conexo).

Distancia entre dos nodos en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y sean $u, v \in V$, se define la distancia entre u y v y se denota por $d(u, v)$ como la mínima longitud de todos los caminos dirigidos en $G = (V, A)$ de nodo origen u y nodo destino v.

Obsérvese que en un digrafo puede ocurrir que $d(u, v) \neq d(v, u)$. Además, en caso de que no exista ningún camino dirigido en $G = (V, A)$ de nodo origen u y nodo destino v, la distancia entre ambos nodos se define como $d(u, v) = \infty$. Téngase en cuenta que solamente ocurrirá que $d(u, v) = d(v, u) = \infty$ en el caso de que $G = (V, A)$ no sea un digrafo conexo (véase definición de digrafo conexo).

Excentricidad de un nodo en un grafo.- Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $u \in V$, se define la excentricidad del nodo u en el grafo $G = (V, E)$ y se denota por $ex(u)$ a la mayor de las longitudes de los caminos elementales (véase definición de camino elemental) que tienen a u como uno de sus extremos. Es decir,

$$ex(u) = \max\{d(u, v) /\ v \in V\}$$

Excentricidad de un nodo en un digrafo.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo y sea $u \in V$, se define la excentricidad del nodo u en el digrafo $G = (V, A)$ y se denota por $ex(u)$ a la mayor de las longitudes de los caminos elementales dirigidos (véase definición de camino elemental dirigido) que tienen por nodo origen al nodo u. Es decir,

$$ex(u) = \max\{d(u, v) /\ \forall\ v \in V\}$$

Diámetro de un grafo (digrafo).- Sea $G = (V, E)$ un grafo ($G = (V, A)$ un digrafo), se define su diámetro y se denota por $diam(G)$ al valor máximo de las excentricidades de todos sus nodos, es decir:

$$diam(G) = \max\{ex(u)/\ u \in V\}$$

Grafos eulerianos

Camino euleriano.- Dado un grafo $G = (V, E)$ conexo (véase definición de grafo conexo) se dice que un camino en ese grafo $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v$, $p \geq 1$ de extremos u y v es euleriano si es un camino simple (véase definición de camino simple) no cerrado que contiene a todas las aristas del grafo, esto es $\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = E$.

Una condición necesaria y suficiente para que un grafo conexo posea un camino euleriano es, tal y como afirma el siguiente teorema, poseer exactamente dos nodos de grado impar.

> *Teorema.-* Un grafo conexo $G = (V, E)$ tiene un camino euleriano si y solo si tiene exactamente dos nodos de grado impar. En ese caso, todo camino euleriano que posea tendrá como extremos tales nodos de grado impar.

Camino euleriano dirigido.- Dado un digrafo $G = (V, A)$ conexo se dice que un camino en ese digrafo $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v,\ p \geq 1$ de nodo origen u y nodo destino v es euleriano dirigido si es un camino simple dirigido (véase definición de camino simple dirigido) no cerrado que contiene a todos los arcos del digrafo, esto es $\{a_1, a_2, \dots, a_p\} = A$.

Una condición suficiente para que un digrafo conexo posea un camino euleriano dirigido, viene dada por el siguiente resultado:

> *Proposición.-* Un digrafo conexo $G = (V, A)$ tiene un camino euleriano dirigido si existen $u, v \in V$ con $u \neq v$ y $gr_G^+(u) = gr_G^-(u) + 1$ y $gr_G^-(v) = gr_G^+(v) + 1$ y $\forall\, w \in V \setminus \{u, v\}$ se tiene que $gr_G^+(w) = gr_G^-(w)$. En ese caso u es el nodo origen del camino euleriano dirigido y v el nodo destino.

Circuito euleriano.- Dado un grafo $G = (V, E)$ conexo se dice que un circuito (véase definición de circuito) en ese grafo es un circuito euleriano si es un camino euleriano cerrado.

Circuito euleriano dirigido.- Dado un digrafo $G = (V, A)$ conexo se dice que un circuito en ese digrafo (véase definición de circuito dirigido) es un circuito euleriano dirigido si es un camino euleriano dirigido cerrado.

Grafo euleriano.- Se dice que un grafo $G = (V, E)$ conexo es euleriano si posee un circuito euleriano.

Digrafo euleriano.- Se dice que un digrafo $G = (V, A)$ conexo es euleriano si posee un circuito euleriano dirigido.

Grafo semieuleriano.- Se dice que un grafo $G = (V, E)$ es semieuleriano si no es un grafo euleriano pero admite un camino euleriano.

Digrafo semieuleriano.- Se dice que un digrafo $G = (V, A)$ es semieuleriano si no es un digrafo euleriano pero admite un camino euleriano dirigido.

Grafos hamiltonianos

Camino hamiltoniano.- Dado un grafo $G = (V, E)$ conexo se dice que un camino en ese grafo $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_p, v_p = v,\ p \geq 1$ de extremos u y v es hamiltoniano si es un camino elemental (véase definición de camino elemental) no cerrado que contiene a todos los nodos del grafo, esto es $\{v_0, v_1, \dots, v_p\} = V$.

Camino hamiltoniano dirigido.- Dado un digrafo $G = (V, A)$ conexo se dice que un camino en ese digrafo $u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_p, v_p = v,\ p \geq 1$ de nodo origen u y nodo destino v es hamiltoniano dirigido si es un camino elemental dirigido (véase definición de camino elemental dirigido) no cerrado que contiene a todos los nodos del digrafo, esto es $\{v_0, v_1, \dots, v_p\} = V$.

Cabe destacar que no existen condiciones necesarias y suficientes para demostrar la existencia de caminos hamiltonianos en un grafo. Los dos siguientes teoremas ofrecen condiciones suficientes para ello.

Teorema.- Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles de orden $n \geq 2$. Si se verifica que $gr_G(u) \geq \frac{n-1}{2}\ \forall u \in V$, entonces el grafo $G = (V, E)$ posee un camino hamiltoniano.

Teorema.- Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de orden $n \geq 2$. Si se verifica que $gr_G(u) + gr_G(v) \geq n - 1 \; \forall u, v \in V$ con $u \neq v$, entonces el grafo $G = (V, E)$ posee un camino hamiltoniano.

De forma similar ocurre para digrafos:

Teorema.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo sin bucles de orden $n \geq 2$. Si se verifica que $gr_G(u) \geq \frac{n-1}{2} \; \forall u \in V$, entonces el digrafo $G = (V, A)$ posee un camino hamiltoniano dirigido.

Teorema.- Sea $G = (V, A)$ un digrafo simple de orden $n \geq 2$. Si se verifica que $gr_G(u) + gr_G(v) \geq n - 1 \; \forall u, v \in V$ con $u \neq v$, entonces el digrafo $G = (V, A)$ posee un camino hamiltoniano dirigido.

Ciclo hamiltoniano.- Dado un grafo $G = (V, E)$ conexo se dice que un ciclo en ese grafo es un ciclo hamiltoniano si es un camino hamiltoniano cerrado.

Ciclo hamiltoniano dirigido.- Dado un digrafo $G = (V, A)$ conexo se dice que un ciclo en ese digrafo es un ciclo hamiltoniano dirigido si es un camino hamiltoniano dirigido cerrado.

Grafo hamiltoniano.- Se dice que un grafo $G = (V, E)$ conexo es hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano.

Digrafo hamiltoniano.- Se dice que un digrafo $G = (V, A)$ conexo es hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano dirigido.

Grafo semihamiltoniano.- Se dice que un grafo $G = (V, E)$ es semihamiltoniano si no es un grafo hamiltoniano pero admite un camino hamiltoniano.

Digrafo semihamiltoniano.- Se dice que un digrafo $G = (V, A)$ es semihamiltoniano si no es un digrafo hamiltoniano pero admite un camino hamiltoniano dirigido.

6.2. Formas de representación de un grafo

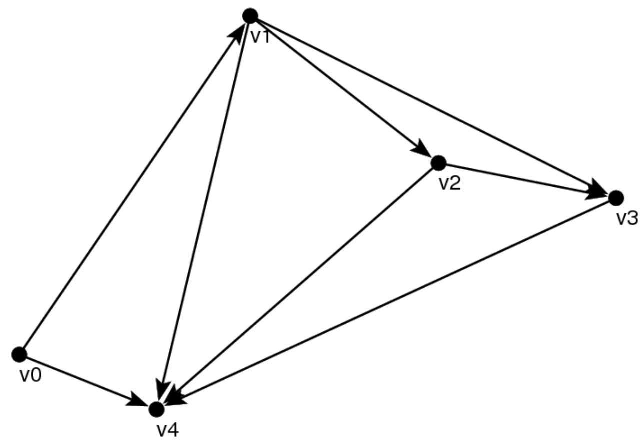
Como es bien sabido, existen diferentes formas de representar los elementos principales de un grafo, esto es, su conjunto de nodos y su conjunto de aristas. Entre ellas destacan la representación gráfica y la representación numérica.

Representación gráfica de un grafo

Aunque existen multitud de variantes, de forma general, en la representación gráfica de un grafo sus nodos se representan mediante puntos en el plano y sus aristas por medio de líneas que unen los pares de puntos correspondientes a sus nodos extremos. En el caso de un digrafo, sus arcos se representan mediante líneas con punta de flecha que apuntan hacia el punto que representa el nodo destino correspondiente en cada caso.

Así, una representación gráfica del digrafo $G = (V, A)$ con conjuntos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$ puede ser la que se muestra en la Figura 9.

Figura 9. Representación gráfica del digrafo G

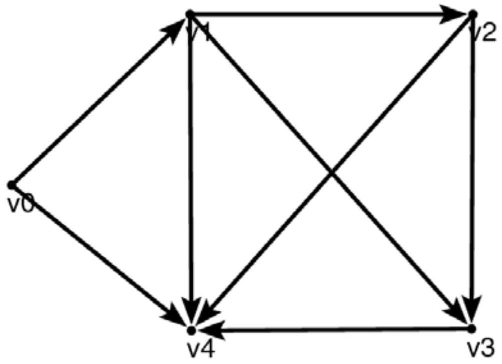


Fuente: elaboración propia

Lo importante de la representación gráfica de un grafo es visualizar la propia estructura topológica del grafo. Características tales como la localización exacta de los puntos, el tamaño de los mismos, el grosor de las líneas, su curvatura, etc., no son más que variantes de representación.

Esto hace que un mismo grafo admita representaciones gráficas distintas. Así, por ejemplo, las representaciones gráficas de la Figura 9 y Figura 10 son dos representaciones del mismo digrafo G.

Figura 10. Otra representación gráfica del digrafo G



Fuente: elaboración propia

Cabe destacar que la representación gráfica de un grafo de orden y tamaño reducidos resulta de gran utilidad, ya que a simple vista pueden visualizarse muchas características del mismo tales como orden, tamaño, grado de los nodos, pares de nodos que componen las aristas, etc. Sin embargo, para grafos de orden y tamaño elevado es recomendable, además de complementar la representación gráfica con algún tipo de análisis, tener en cuenta una serie de indicadores que lo hagan más comprensible.

En relación a ello, el uso de software especializado para la representación gráfica de grafos (véase Capítulo 8. Software para visualización y análisis de información con estructura de red) ofrece una gran variedad de opciones. Sugiyama (2002) por ejemplo establece al respecto una serie de reglas, entre las que destacan:

- Reglas básicas.- referidas a aspectos elementales tales como el solapamiento:
  - No solapar nodos.
  - No solapar aristas.
  - No solapar nodos con aristas.
- Reglas semánticas.- relativas al posicionamiento de nodos y aristas acorde al significado de lo que representen:
  - Representar vértices específicos con un tamaño diferente.
  - Agrupar vértices específicos.
  - Situar vértices específicos en el centro o en la frontera de la representación gráfica.

- Reglas estructurales.- relativas al posicionamiento de acuerdo a propiedades de la teoría de grafos:
  - Situar en el centro de la representación aquellos nodos con grado alto.
  - Posicionar los nodos de forma jerárquica.
  - Situar los nodos con equilibrio y simetría.
  - Minimizar el cruce de aristas.
  - Minimizar la existencia de ángulos en las aristas.
  - Minimizar el área de representación.
  - Minimizar la longitud media de las aristas.

Representación numérica de un grafo

Otra forma de representación de grafos muy relacionada con el tratamiento computacional de los mismos y con la presente investigación, es su representación a través de listas y matrices de adyacencia. Este tipo de representaciones recogen la estructura topológica del grafo al que representan, por lo que juegan un papel fundamental como representación del mismo.

La representación mediante listas de adyacencia de un grafo consiste en asociar a cada nodo del mismo una lista que contenga todos los nodos que sean adyacentes a él. En el caso de digrafos se asocia a cada nodo que sea nodo origen de al menos un arco del digrafo una lista de los nodos destino de todos los arcos con nodo origen ese nodo en cuestión.

Así, para el ejemplo mostrado anteriormente relativo al digrafo $G = (V, A)$ definido por el conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de arcos dado por $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$ se tiene la siguiente representación mediante listas de adyacencia:

$$
\begin{gathered}
[v_0, v_1, v_4] \\
[v_1, v_2, v_3, v_4] \\
[v_2, v_3, v_4] \\
[v_3, v_4]
\end{gathered}
$$

Por otro lado, la matriz de adyacencia de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ se define como:

$$A_G = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}, \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ [v_i, v_j] \in E \\ 0\ si\ [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

Con ello se tiene que la matriz de adyacencia de un grafo es una matriz booleana y cuadrada, de orden el mismo del grafo.

Además, puesto que en un grafo $G = (V, E)$ no dirigido ocurre que $\forall\, u, v \in V\ [u, v] = [v, u]$ se tiene que su matriz de adyacencia es simétrica, esto es:

$$A_G = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}} = (a_{ji})_{\substack{j=0,\dots,n \\ i=0,\dots,n}}$$

De forma similar, la matriz de adyacencia de un digrafo $G = (V, A)$ con conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ se define como:

$$A_G = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}, \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ (v_i, v_j) \in A \\ 0\ si\ (v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

Así, toda matriz de adyacencia asociada a un digrafo es una matriz booleana y cuadrada, de orden el mismo del digrafo.

Para el ejemplo dado por el digrafo $G = (V, A)$ con $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$, su matriz de adyacencia es:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es preciso tener en cuenta que la representación matricial de un grafo mediante su matriz de adyacencia puede extenderse a multigrafos y multidigrafos de la siguiente manera:

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo con $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, su matriz de adyacencia se define como:

$$A_G = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}, \text{ donde}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{número de aristas de extremos } v_i \text{ y } v_j\ si\ [v_i, v_j] \in E \\ 0\ si\ [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

Si $G = (V, A)$ es un multidigrafo con $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, su matriz de adyacencia se define como:

$$A_G = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}, \text{ donde}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{número de arcos con origen } v_i \text{ y destino } v_j \; si \; (v_i, v_j) \in A \\ 0 \; si \; (v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

Con ello, la matriz de adyacencia tanto de un multigrafo como de un multidigrafo es una matriz cuadrada de orden el mismo del grafo correspondiente. Además, si bien esta matriz es simétrica para el caso de un multigrafo, puede no serlo para el caso de un multidigrafo.

Obsérvese que para cualquier grafo $G = (V, E)$, en general, su matriz de adyacencia depende de cómo se ordenen sus nodos, de forma que al existir $card(V)!$ ordenaciones posibles para sus nodos, existen también $card(V)!$ matrices de adyacencia para un grafo. Debido precisamente a esa falta de unicidad, para especificar una matriz de adyacencia concreta, suele advertirse cómo se han ordenado sus nodos.

6.3. Matrices de accesibilidad asociadas a un grafo

Un tipo de análisis fundamental sobre un grafo es el relativo a la conectividad de los nodos que lo constituyen. Algunos de los conceptos relacionados con la conectividad en un grafo, tales como la existencia de camino entre dos nodos, nodo n-accesible desde otro nodo, conjunto de sucesores y predecesores de un nodo concreto en un grafo, etc., (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos) son fácilmente analizables mediante el uso de determinadas matrices.

La matriz de adyacencia asociada a un grafo tiene un papel fundamental a este respecto, ya que permite resolver diversas cuestiones sobre la conectividad del mismo, debido a la existencia de una relación entre la conectividad del grafo y las potencias sucesivas de tal matriz.

Así, de la misma manera que la matriz de adyacencia asociada a un grafo contempla la existencia o no de una relación de adyacencia entre todos los posibles pares de nodos que lo constituyen, es decir, la existencia o no de caminos de longitud uno entre todos los pares de nodos, existe otra matriz asociada a un grafo que contempla la existencia o no de caminos de cualquier longitud entre todos los posibles pares de nodos.

Esta matriz, denominada matriz de caminos o matriz de accesibilidad asociada a un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, se define de la siguiente manera[12]:

$$P_G = (p_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}} \text{, donde}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; existe \; un \; camino \; desde \; v_i \; hasta \; v_j \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$$

Atendiendo simplemente a las definiciones de matriz de adyacencia (véase apartado 6.2. Formas de representación de un grafo) y matriz de caminos asociadas a un grafo, se observa que existe una relación entre ambas de forma que si $a_{ij} = 1$ para unos determinados $i, j = 0, \dots, n$ entonces $p_{ij} = 1$, ya que si existe una arista entre dos determinados nodos del grafo, entonces existe al menos ese camino entre ambos.

Así, la matriz de adyacencia puede verse como un caso particular de la matriz de caminos, en el sentido de que en ella únicamente se tiene en cuenta la existencia en el grafo de caminos de longitud uno, mientras que la matriz de caminos tiene en cuenta la existencia de caminos entre los nodos del grafo independientemente de su longitud.

Ahora bien, la relación entre ambas matrices es tal que la matriz de caminos asociada a un grafo puede obtenerse a partir de su matriz de adyacencia. Para ello, es preciso tener en cuenta los siguientes resultados:

Proposición.- Sea A_G la matriz de adyacencia de un grafo $G = (V, E)$ y sea A_G^k su potencia k-ésima, $k \geq 1$. Entonces se verifica que el elemento ij de tal matriz se corresponde con el número de caminos de longitud k existentes en el grafo entre el nodo v_i y el nodo v_j.

Proposición.- Sea A_G la matriz de adyacencia de un grafo $G = (V, E)$ y sea A_G^k su potencia k-ésima, $k \geq 1$. Entonces se verifica que el elemento ij de la matriz $B_G^r = A_G + A_G^2 + A_G^3 + \dots + A_G^r$ con $r \geq 1$ se corresponde con el número de caminos de longitud menor o igual que r existentes en el grafo entre el nodo v_i y el nodo v_j.

[12] En algunas definiciones de la matriz de caminos asociada a un grafo se añade además la condición de que $p_{ii} = 1$, $\forall \; i = 0, \dots, n$.

Obsérvese que la matriz $B_G = B_G^{n+1} = A_G + A_G^2 + A_G^3 + \cdots + A_G^{n+1}$ ($n+1$ es el orden del grafo) así obtenida indica el número de caminos de cualquier longitud existentes entre cada par de nodos del grafo. Téngase en cuenta que la potenciación puede pararse cuando la matriz se estabiliza.

Con ello y puesto que la matriz de caminos solamente representa la existencia o no de camino entre cada par de nodos y no el número de ellos, puede definirse la matriz de caminos asociada al grafo $G = (V, E)$ a partir de la matriz $B_G = (b_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}$ de la siguiente manera[13]:

$$P_G = (p_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}} \text{, donde } p_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; b_{ij} > 0 \\ 0 \; si \; b_{ij} = 0 \end{cases}$$

Con todo lo anterior, la matriz B_G resulta de gran utilidad, ya que contempla el número de caminos existentes entre cada par de nodos del grafo, pudiendo además deducir, a partir de ella, la matriz de caminos asociada al grafo.

Cabe destacar además que la no unicidad ya mencionada anteriormente de la matriz de adyacencia asociada a un grafo $G = (V, E)$ debida a las $card(V)!$ posibles reordenaciones de los nodos del grafo, se traslada de la misma manera a la no unicidad de la matriz de caminos asociada a un grafo, por lo que si se desea concretar una determinada matriz de caminos, se requiere especificar el orden en el que se han considerado los nodos del grafo.

Es preciso señalar además que todo lo mencionado respecto de las matrices de accesibilidad para grafos, se traduce del mismo modo para digrafos, considerando arcos en lugar de aristas y, caminos dirigidos en lugar de caminos.

6.4. Clausura transitiva de un grafo

No todos los grafos son transitivos (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), sin embargo, pueden obtenerse a partir de ellos grafos transitivos, considerando lo que se denomina la clausura transitiva o cierre transitivo de un grafo.

[13] Si en la definición de matriz de caminos asociada a un grafo se añade además la condición de que $p_{ii} = 1$, $\forall\, i = 0, \dots, n$, entonces tal matriz viene dada por $P_G + Id$.

Concretamente la clausura o cierre transitivo de un grafo $G = (V, E)$ se define como un grafo $G^C = (V, E^C)$ con el mismo conjunto de nodos que G y de forma que existe una arista $[u, v]$ en G^C siempre que existe un camino de extremos u y v en G, esto es:

$$E^C = \{[\mathrm{u}, \mathrm{v}]/u\,, v \in V\ y\ existe\ un\ camino\ \text{de extremos}\ u\ \text{y}\ v\ en\ G\}$$

Con ello se tiene que la clausura transitiva $G^C = (V, E^C)$ de un grafo $G = (V, E)$ es el grafo transitivo más pequeño que lo contiene.

De forma similar y, atendiendo a la definición de digrafo transitivo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), se define la clausura o cierre transitivo de un digrafo. Así, sea $G = (V, A)$ un digrafo, su clausura transitiva es otro digrafo $G^C = (V, A^C)$ con el mismo conjunto de nodos que G y de forma que existe un arco (u, v) en G^C siempre que existe un camino dirigido en G de nodo origen u y nodo destino v, es decir:

$$A^C = \{(\mathrm{u}, \mathrm{v})/u\,, v \in V\ y\ existe\ un\ camino\ \text{de nodo origen}\ u\ \text{y nodo destino}\ v\ en\ G\}$$

Con esto se afirma entonces que la clausura transitiva $G^C = (V, A^C)$ de un digrafo $G = (V, A)$ es el digrafo transitivo más pequeño que lo contiene. Es preciso mencionar al respecto que la clausura transitiva de un digrafo es además única.

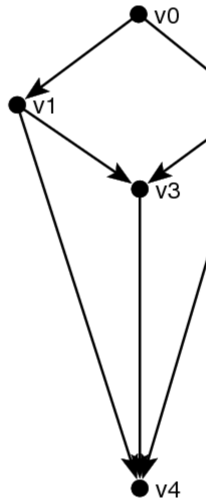
Se considera así, a modo de ejemplo, el digrafo $G = (V, A)$ definido por los conjuntos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$. Una representación gráfica del mismo puede verse en la Figura 11.

Se tiene entonces que la clausura transitiva de este digrafo corresponde con el digrafo $G^C = (V, A^C)$ donde su conjunto de arcos viene dado por:

$$A^C = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

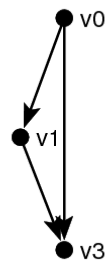
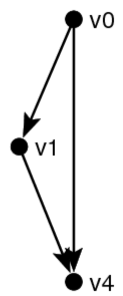
Obsérvese que la diferencia entre los conjuntos A y A^C se encuentra en los arcos (v_0, v_3) y (v_0, v_4), ya que estos no forman parte del conjunto A y sin embargo sí lo hacen del conjunto A^C. La explicación se encuentra en que el arco $(v_0, v_3) \in A^C$ porque los arcos (v_0, v_1), $(v_1, v_3) \in A$ y el arco $(v_0, v_4) \in A^C$ porque (v_0, v_1), $(v_1, v_4) \in A$. En la Figura 12 se representa gráficamente este hecho.

Figura 11. Representación gráfica del digrafo G



Fuente: elaboración propia

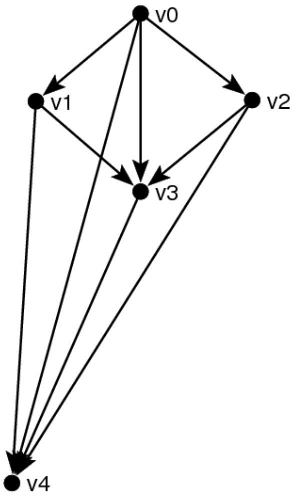
Figura 12. Representación gráfica de nodos y arcos de G y G^C

$(v_0, v_1), (v_1, v_3) \in A$ 	$(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_0, v_3) \in A^C$ 
$(v_0, v_1), (v_1, v_4) \in A$ 	$(v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_0, v_4) \in A^C$ 

Fuente: elaboración propia

Con lo anterior una representación gráfica de la clausura transitiva $G^C = (V, A^C)$ del digrafo $G = (V, A)$ puede observarse en la Figura 13.

Figura 13. Representación gráfica del digrafo G^C



Fuente: elaboración propia

Cabe mencionar, por otro lado, que puede resultar de interés el establecer en el conjunto de nodos de un digrafo una determinada relación binaria. Así, sea $G = (V, A)$ un digrafo sin ciclos, puede considerarse en su conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ la relación binaria definida de la siguiente manera:

Sean $u, v \in V$, se dice que u está relacionado con v y se denota por $u < v$ si existe un camino dirigido en $G = (V, A)$ con nodo origen u y nodo destino v.

Es fácil ver que la relación binaria así definida es una relación de orden parcial, ya que cumple las siguientes propiedades:

- Irreflexividad.- $u \nless u \; \forall \, u \in V$, ya que al ser un digrafo sin ciclos no posee ningún camino elemental dirigido y cerrado.

- Antisimetría.- si $u < v$ entonces $v \nless u$ donde $u, v \in V$, puesto que en caso contrario existiría un camino dirigido con nodo origen u y nodo destino v y otro camino dirigido con nodo origen v y nodo destino u, formando así un ciclo.

- Transitividad.- si $u < v$ y $v < w$ entonces $u < w$ donde $u, v, w \in V$, debido a que, como por un lado se tiene que $u < v$, entonces existe un camino $u = u_0, a_1, u_1, a_2, \dots, a_p, u_p = v$, $p \geq 1$, y como por otro lado se tiene que $v < w$, entonces existe $v = v_0, b_1, v_1, b_2, \dots, b_q, v_q = w$, $q \geq 1$. Así, el propio camino $u = u_0, a_1, u_1, a_2, \dots, a_p, u_p, v_0, b_1, v_1, b_2, \dots, b_q, v_q = w$ hace que $u < w$.

Esta relación de orden parcial en el digrafo $G = (V, A)$ induce así un ordenamiento parcial de su conjunto de nodos.

Cabe destacar entonces que, si se considera la clausura transitiva de tal digrafo, se tiene que ambos dan lugar al mismo ordenamiento parcial de su conjunto de nodos. Con ello, la clausura transitiva de un digrafo se caracteriza en este sentido por ser el digrafo de mayor tamaño que genera el mismo ordenamiento parcial de sus nodos.

Una vez considerado el concepto de clausura o cierre transitivo de un grafo (digrafo), es preciso mencionar cómo puede calcularse su matriz de adyacencia. Esta matriz es muy sencilla de determinar, teniendo en cuenta la relación existente ya mencionada, entre las potencias sucesivas de la matriz de adyacencia de un grafo (digrafo) y la conectividad en el mismo (véase apartado 6.3. Matrices de accesibilidad asociadas a un grafo).

Así, sea $G = (V, E)$ un grafo con matriz de adyacencia $A_G = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}$ respecto a $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, la matriz de adyacencia de su clausura transitiva $G^C = (V, E^C)$ es exactamente la matriz de caminos asociada a $G = (V, E)$, es decir[14]:

$$A_{G^C} = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}, \text{ donde}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; existe \; un \; camino \; desde \; v_i \; hasta \; v_j \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$$

Por ello, la matriz de adyacencia de la clausura transitiva $G^C = (V, E^C)$ de un grafo $G = (V, E)$ puede calcularse como:

[14] En algunas definiciones de la matriz de caminos asociada a un grafo se añade además la condición de que $a_{ii} = 1$, $\forall \; i = 0, \dots, n$.

$$A_{G^C} = (a_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}\ , \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ b_{ij} > 0 \\ 0\ si\ b_{ij} = 0 \end{cases}$$

donde b_{ij} es el elemento ij de la matriz de caminos $B_G = A_G + A_G^2 + A_G^3 + \cdots + A_G^{n+1}$.

Cabe mencionar que la matriz de adyacencia de la clausura transitiva de un digrafo se define de manera totalmente análoga a lo descrito para grafos. Así, una vez conocido cómo obtener la matriz de adyacencia de la clausura transitiva de un grafo (digrafo) a partir de la matriz de adyacencia del propio grafo (digrafo) es preciso mencionar qué posibilidades de cálculo existen para ello.

Algoritmos de cálculo de clausura transitiva

Abellanas y Lodares (1990) definen de una forma muy simple y clara el concepto de algoritmo, expresando que "consiste en una secuencia de instrucciones, las cuales, realizadas adecuadamente, dan lugar al resultado deseado" (p.11).

En general, el concepto de algoritmo está muy asociado al contexto computacional, siendo preciso así para su elaboración y ejecución, el uso de lenguajes de programación y ordenadores.

Antes de mencionar algunos de los algoritmos existentes para el cálculo de la clausura transitiva de un digrafo, es preciso tener en cuenta algunas cuestiones sobre complejidad computacional de algoritmos (Abellanas y Lodares, 1990; Chartrand y Oellermann, 1993; Papadimitriou, 2003; Cormen, Leiserson, Rivest y Stein, 2009; Salas y Rodríguez, 2013). Ello debido a que, como normalmente existe más de un algoritmo que encuentra solución a un determinado problema -el cálculo de la clausura transitiva de un digrafo en este caso-, es habitual su comparación atendiendo a la complejidad que supone su resolución.

Por lo general, se distinguen dos tipos de complejidad computacional, la relativa al tiempo y la relativa al espacio. La complejidad computacional de tiempo hace referencia al tiempo de ejecución del algoritmo, mientras que la complejidad computacional de espacio hace referencia al espacio de almacenamiento en la memoria del ordenador. Además, se puede distinguir complejidad en el peor caso y complejidad promedio. La más habitual de precisar, por ser mucho más sencilla de calcular, es la primera. Advertir que el tiempo de ejecución no suele corresponder con el tiempo real físico, sino más bien con el número de operaciones elementales realizadas. No cabe duda que el cálculo exacto de número de operaciones elementales requeridas por un algoritmo no es una tarea sencilla. Ello depende, entre otros aspectos, del tamaño de la entrada del algoritmo. Es por esta razón por la que en lugar del cálculo exacto se suele estudiar el comportamiento de la función y, más concretamente, el comportamiento asintótico de la función, esto es, el orden del número de operaciones que se requiere cuando el tamaño de entrada del algoritmo es suficientemente grande.

Este es un aspecto lógico de estudio, ya que cuando el tamaño de la entrada es pequeño casi todo algoritmo es bueno, no apreciándose prácticamente las diferencias entre unos y otros algoritmos. Sin embargo, cuando aumenta considerablemente el tamaño de la entrada es cuando realmente se puede conocer si un algoritmo es adecuado o al menos mejor que otro.

Las cotas suponen en este aspecto una gran herramienta, ya que conociendo una cota inferior o superior del número de operaciones elementales requeridas por un algoritmo, pueden llegar a compararse algoritmos sin tener que determinar el número exacto de operaciones que se precisan.

Así, el análisis asintótico de funciones (Abellanas y Lodares, 1990; Villalpando, 2003; Cormen et al., 2009) desempeña un papel fundamental en el estudio de la complejidad de algoritmos. Con ello se trata la función tiempo t como una función real de variable natural, esto es, $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y se comparan las funciones de los dos algoritmos que se deseen estudiar. Se trata entonces de conocer cuál de las dos funciones posee mejor comportamiento asintótico, esto es, cual es menor cuando su variable independiente es suficientemente grande.

Cabe destacar que, en ocasiones, resulta complicado hallar explícitamente la función tiempo de un algoritmo. Sin embargo, un análisis asintótico sin su expresión explícita es posible. Así, puede atenderse a la definición de cota superior asintótica (Abellanas y Lodares, 1990; Villalpando, 2003; Cormen et al., 2009):

> Si $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que g domina asintóticamente a f (o simplemente que g domina a f) si existen enteros $k \geq 0$ y $m \geq 0$ tales que para todo entero $n \geq m$ se verifica la desigualdad:
>
> $$|f(n)| \leq k|g(n)|$$

Con ello, si f y g son dos funciones de tiempo de dos algoritmos F y G respectivamente, esto significa entonces que el algoritmo F nunca tardará más de k veces el tiempo que tarda el algoritmo G en resolver un problema del mismo tamaño.

Con ello se denota por $O(f)$ al conjunto de todas las funciones dominadas por la función f. Esto es,

$$O(f) = \{g/g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ es\ aplicación\ y\ f\ domina\ a\ g\}$$

Es preciso mencionar que algunos de los conjuntos $O(f)$ que aparecen con frecuencia en el análisis de algoritmos son:

$$O(1), O(\log n), O(n), O(n \cdot \log n), O(n^2), O(n^3), \dots, O(n^p), \dots, O(c^n), O(n!)$$

De forma que si la función tiempo de un algoritmo es de orden 1 se dice que el algoritmo tiene complejidad constante, si es de orden $log\, n$ se dice que es logarítmica, si es de orden n se dice que es lineal, si es de orden n^p siendo p un número natural se dice que es polinómica, si es de orden c^n con $c > 1$ se dice que es exponencial y si es de orden $n!$ se dice que es factorial.

En relación a los anteriores conjuntos se encuentran los siguientes resultados que ayudan a la comparación de la complejidad computacional de algoritmos (Abellanas y Lodares, 1990):

Teorema.- Se verifican los siguientes contenidos:

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \cdot \log n) \subset O(n^2) \subset O(c^n) \subset O(n!)$$

donde $c > 1$. Además, dichos contenidos son contenidos estrictos, es decir, en ninguno de ellos se da la igualdad.

Teorema.- Si p y q son números enteros positivos tales que $p < q$ se verifica que:

$$O(n^p) < O(n^q)$$

siendo el contenido estricto.

Corolario.- Si $f(n)$ es una función polinómica de grado k se verifica que:

$$f(n) \in O\left(n^k\right)$$

Una vez mencionadas así algunas cuestiones generales sobre la complejidad computacional de algoritmos, es el momento de destacar algunos de entre los muchos que existen para el cálculo de la clausura transitiva de un digrafo (Arlazarov, Dinits, Kronrod y Faradzhev, 1970; Schmitz, 1983; Habib, Morvan y Rampon, 1993).

Nombrar así, por ejemplo, el algoritmo debido a Munro(1971), basado en el método de multiplicación de matrices de Strassen (Cohen y Roth, 1976) computable en $O(n^{\beta})$ operaciones elementales para matrices de orden n.

Este hecho añadido a la afirmación de Furman (1970) sobre la posibilidad de calcular la clausura transitiva mediante sucesivas potencias cuadradas en $O(log_2 n)$ multiplicaciones de matrices booleanas conduce a garantizar la posibilidad de calcular la clausura transitiva de cualquier matriz booleana de orden n en $O(\mathrm{n}^{\beta} \cdot log_2 n)$ operaciones elementales, donde n es el orden del digrafo en cuestión.

Por otro lado, Fischer y Meyer (1971) además de presentar un método fundamentado en matrices inversas, demuestran que los problemas de cálculo de la clausura transitiva y del cómputo de multiplicaciones lógicas de matrices booleanas son del mismo orden de dificultad. De hecho concluyen exactamente que la multiplicación lógica de matrices booleanas de orden n requiere un tiempo que es, a lo sumo, una constante más que el tiempo de computación de la clausura transitiva de un grafo de orden n. De hecho Furman (1970), Fischer y Meyer (1971) y Munro (1971) afirman que dos matrices booleanas pueden multiplicarse en $O\left(n^{log_2 7}\right)$ operaciones elementales.

Otros consideran el algoritmo de Floyd-Warshall o una combinación del mismo con la multiplicación lógica de matrices booleanas, ofreciendo ambos una complejidad computacional de tiempo $O(n^3)$ (Cormen et al., 2009).

Destacar además el algoritmo de complejidad lineal descrito por Schnorr (1978) así como los algoritmos probabilísticos propuestos por Purdom (1970) y O'Neil y O'Neil (1973) en los que, teniendo en cuenta que la multiplicación de dos matrices depende de la estructura de las mismas, demuestran que, para la multiplicación de dos matrices booleanas aleatorias, se espera un número de operaciones elementales de $O(n^2)$.

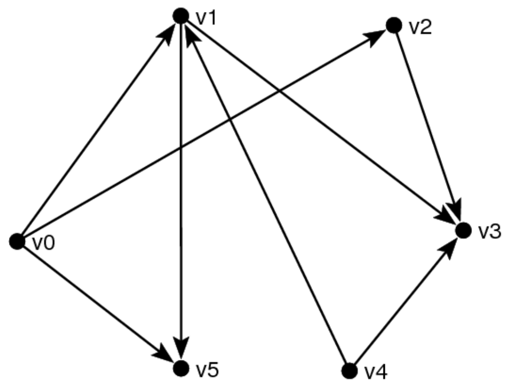
6.5. Reducción transitiva de un grafo

Una reducción transitiva de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $G^R = (V, E^R)$ con el mismo conjunto de nodos y tal que no existan: una arista $[u, v] \in E^R$ y un nodo $w \in V$ con $w \neq u$ y $w \neq v$, un camino de extremos u y w, y otro camino de extremos w y v en G.

En el caso de digrafos, la reducción transitiva se define de forma similar. Así, sea $G = (V, A)$ un digrafo. Una reducción transitiva suya es un digrafo $G^R = (V, A^R)$, con el mismo conjunto de nodos y tal que no existan: un arco $(u, v) \in A^R$, un nodo $w \in V$ con $w \neq u$ y $w \neq v$, un camino dirigido de nodo origen u y nodo destino w, y un camino dirigido de nodo origen w y nodo destino v en G.

A modo de ejemplo se considera el siguiente digrafo $G = (V, A)$ definido por el conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y el conjunto de arcos constituido por $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_5), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_4, v_1), (v_4, v_3)\}$. En la Figura 14 puede observarse una representación gráfica de este digrafo así definido.

Figura 14. Representación gráfica del digrafo *G*



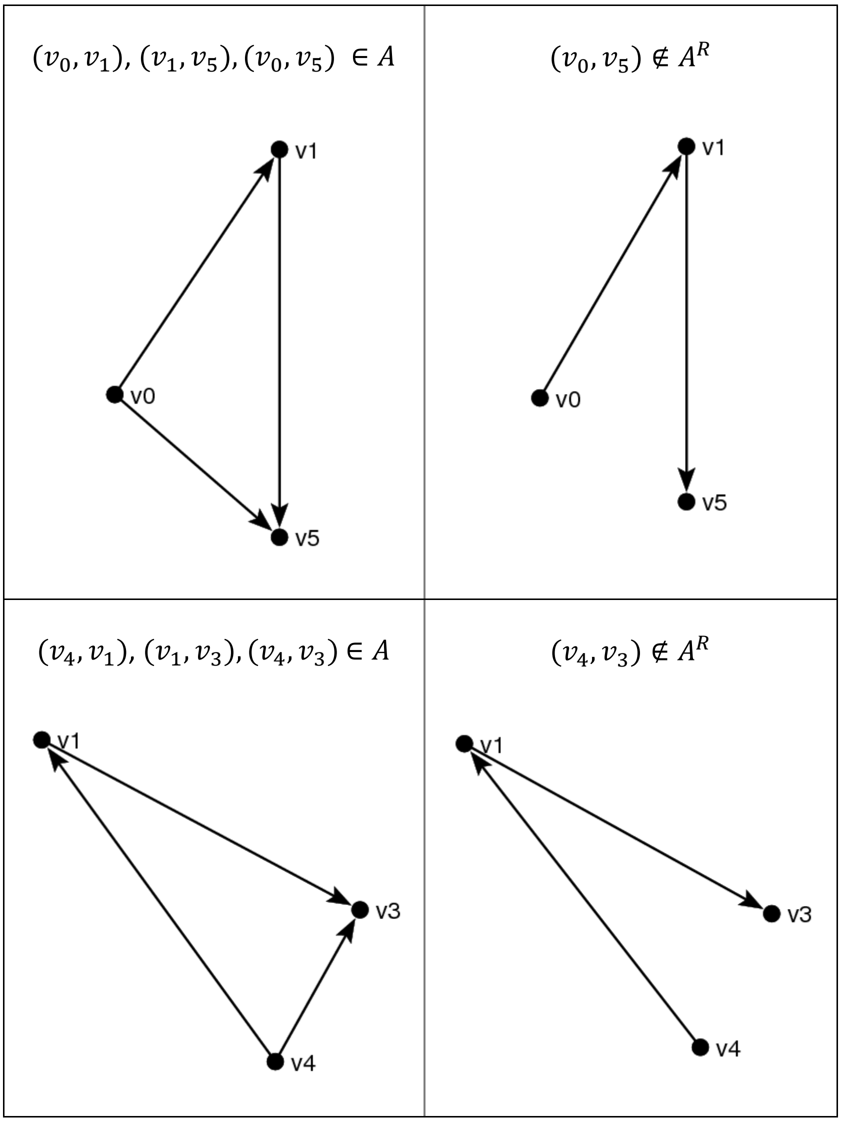
Fuente: elaboración propia

La reducción transitiva de este digrafo corresponde entonces con el digrafo $G^R = (V, A^R)$ con el mismo conjunto de nodos que $G = (V, A)$ y con el siguiente conjunto de arcos:

$$A^R = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_4, v_1)\}$$

La diferencia entre los conjuntos A y A^R se encuentra en los arcos (v_0, v_5) y (v_4, v_3), ya que estos forman parte del conjunto A y sin embargo no forman parte del conjunto A^R. Ello se debe, por un lado, a que (v_0, v_1), $(v_1, v_5) \in A$ y, por otro, a que (v_4, v_1), $(v_1, v_3) \in A$. En la Figura 15 se muestra gráficamente esta explicación.

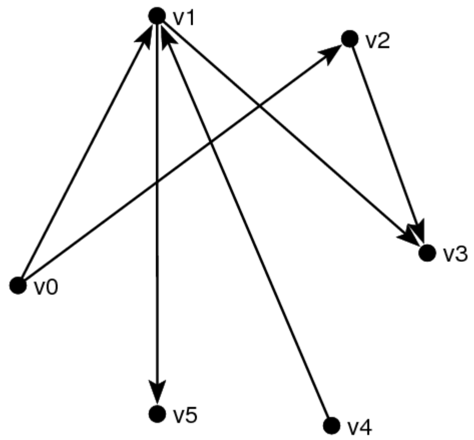
Figura 15. Representación gráfica de nodos y arcos de G y G^R



Fuente: elaboración propia

Con todo lo anterior, una posible representación gráfica de la reducción transitiva $G^R = (V, A^R)$ del digrafo $G = (V, A)$ se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Representación gráfica del digrafo G^R



Fuente: elaboración propia

De modo análogo a lo que ocurre para la clausura transitiva de un digrafo (véase apartado 6.4. Clausura transitiva de un grafo), si se considera un ordenamiento parcial del conjunto de nodos de un digrafo $G = (V, A)$ estableciendo en el mismo la relación binaria de orden parcial definida por:

> Sean $u, v \in V$, se dice que u está relacionado con v y se denota por $u < v$ si existe un camino dirigido en $G = (V, A)$ con nodo origen u y nodo destino v.

se tiene que la reducción transitiva de $G = (V, A)$ genera el mismo ordenamiento parcial de su conjunto de nodos que el propio digrafo $G = (V, A)$, con la salvedad de que la reducción transitiva se caracteriza por ser el digrafo de menor tamaño que genera ese mismo ordenamiento parcial de nodos. En relación a ello, cabe destacar que la reducción transitiva de un digrafo es única solamente para digrafos que no poseen ciclos.

En resumen, un digrafo, su clausura transitiva y su reducción transitiva inducen un mismo ordenamiento parcial de su conjunto de nodos y es que, lógicamente, la clausura transitiva de un digrafo coincide con la clausura transitiva de su reducción transitiva.

En relación al hecho de que la reducción transitiva de un digrafo es el digrafo de menor tamaño que induce el mismo orden en el conjunto de nodos, se tiene que esta puede definirse tal y como lo hacen Aho, Garey y Ullman (1972) de la siguiente manera:

Se dice que el digrafo $G^R = (V, A^R)$ es reducción transitiva del digrafo $G = (V, A)$ siempre que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

a) Existe un camino dirigido con nodo origen u y nodo destino v en G^R si y solo si hay un camino dirigido con nodo origen u y nodo destino v en G.

b) No existe ningún digrafo con menos arcos que G^R que verifique la condición a).

Algoritmos de cálculo de reducción transitiva

Teniendo en cuenta las cuestiones ya mencionadas sobre algoritmos en general y su complejidad computacional, así como algunos de los algoritmos existentes para la clausura transitiva de un digrafo (véase apartado 6.4. Clausura transitiva de un grafo), cabe destacar de la misma manera la existencia de algoritmos para el cálculo de la reducción transitiva de un digrafo (Aho et al., 1972; Schmitz, 1983; Gries, Martin, van de Snepscheut y Udding, 1989; Habib et al., 1993).

Es importante señalar una cuestión relativa a la equivalencia de complejidad computacional entre algunos de los algoritmos de cálculo de la clausura y reducción transitiva de un digrafo. Así, Aho et al. (1972) demuestran que la complejidad computacional del cálculo de la reducción transitiva de un grafo es equivalente a la complejidad computacional de calcular su clausura transitiva, demostrando los siguientes resultados al respecto:

Teorema.- Si existe un algoritmo para calcular la clausura transitiva de un grafo de n nodos en tiempo $O(n^{\alpha})$ entonces existe un algoritmo para calcular su reducción transitiva en tiempo $O(n^{\alpha})$.

Teorema.- Si la reducción transitiva requiere $O(n^{\alpha})$ pasos con $\alpha \geq 2$ en un grafo de n nodos entonces su clausura transitiva requiere $O(n^{\alpha})$ pasos.

Es preciso mencionar que, considerando lo reflejado sobre el cálculo de la reducción transitiva de un digrafo, se ha decidido emplear en la presente investigación un básico algoritmo que atiende simplemente a su propio objetivo, esto es, la eliminación de aquellos arcos que puedan deducirse de otros por transitividad.

La decisión de elaboración de este algoritmo se ha tomado valorando algunos aspectos claves a este respecto en la presente investigación, tales como el software empleado y el formato utilizado para la definición de los conjuntos de nodos y arcos de un digrafo, dejando en segundo plano y, de forma consciente, su complejidad computacional.

Para tal propósito se ha creado una macro en Microsoft Excel haciendo uso de su editor de Visual Basic, desarrollando un código en lenguaje de programación Visual Basic para Aplicaciones (VBA) (Jacobson, 2007).

El algoritmo elaborado para el cálculo de la reducción transitiva de un digrafo parte de su conjunto de arcos. Así, para cada uno de sus arcos y de forma sucesiva, el algoritmo identifica todos los caminos dirigidos existentes en el digrafo que tienen, a ese arco en cuestión, como primer arco del camino.

En el propio proceso de identificación de tales caminos, el algoritmo comprueba si el arco con nodo origen el nodo origen del camino y con nodo destino el nodo destino del último arco añadido al camino, ya forma parte del conjunto de arcos que definen el digrafo. En caso afirmativo este arco se elimina del conjunto de arcos, consiguiendo de esta manera la reducción adecuada del conjunto de arcos que define la reducción transitiva del digrafo en cuestión.

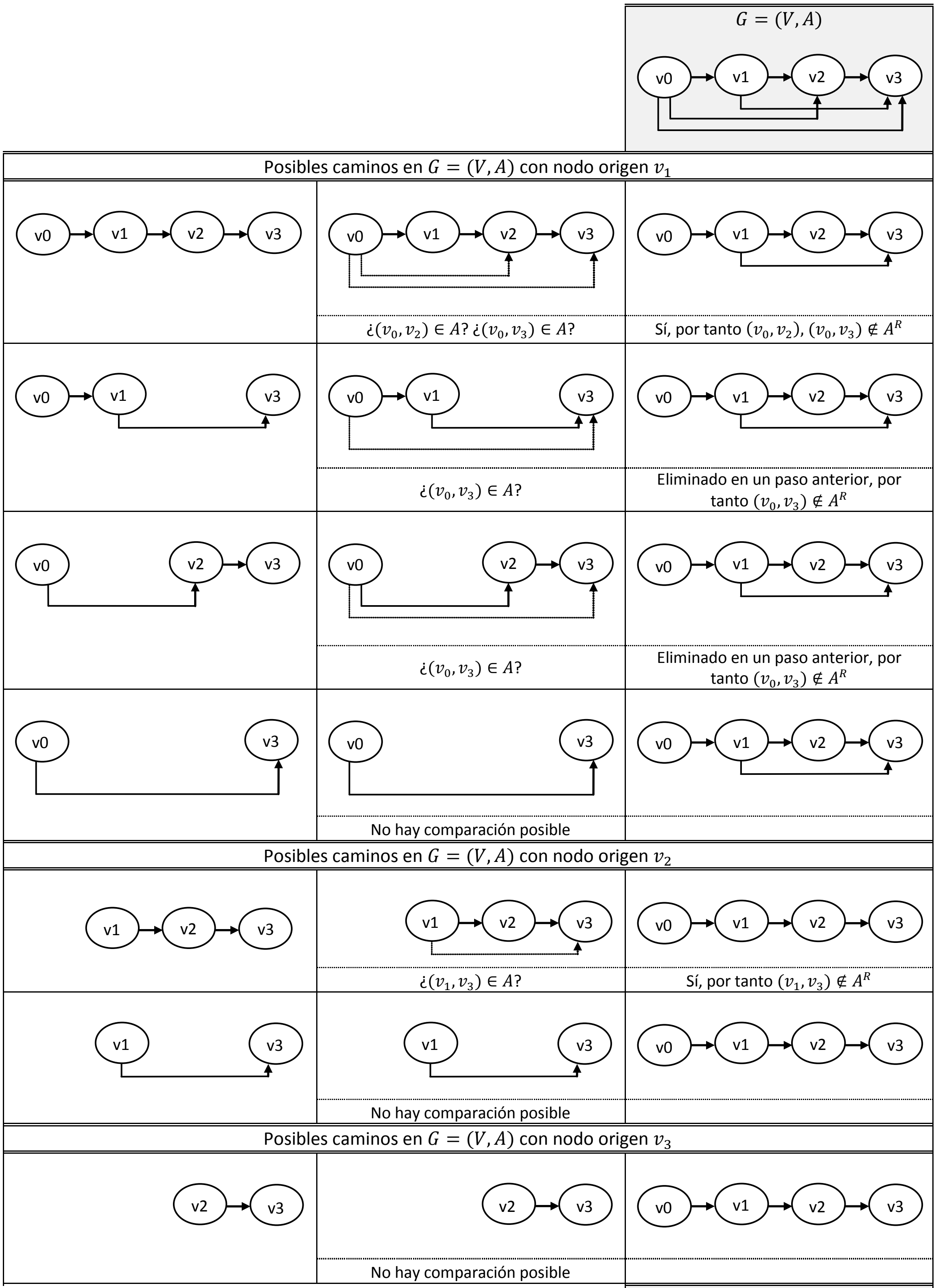
En la Figura 17 se muestra, para su mejor comprensión, un esquema del proceso del algoritmo aplicado a un ejemplo concreto. El digrafo $G = (V, A)$ sobre el que se aplica es el formado por los conjuntos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ y $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$.

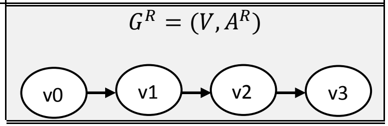
Partiendo entonces del conjunto de arcos A y recorriendo el esquema por filas identifica en primer lugar el camino $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3$ con $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$ y $e_3 = (v_2, v_3)$ y comprueba si los arcos (v_0, v_2) y (v_0, v_3) están en A. Como sí que lo están y pueden deducirse por transitividad los elimina entonces del conjunto de arcos A.

A continuación identifica el camino v_0, e_1, v_1, e_2, v_3 con $e_1 = (v_0, v_1)$ y $e_2 = (v_1, v_3)$ y comprueba si el arco (v_0, v_3) está en A. Este arco estaba en A pero en el paso anterior se eliminó del conjunto por tanto ya no es necesario eliminarlo.

De forma sucesiva realiza el mismo proceso para todos los caminos identificados con primer arco del camino $(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_3)$ y (v_2, v_3).

Figura 17. Algoritmo elaborado aplicado a un caso concreto





Fuente: elaboración propia

CAPÍTULO 7

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS

El origen histórico de la teoría de grafos suele situarse en el siglo XVIII a raíz del bien conocido problema de los siete puentes de Königsberg propuesto por Euler (1736). Tal problema, contextualizado en Königsberg, la actual ciudad rusa de Kaliningrado, consistía en saber si era posible recorrer la ciudad pasando por sus siete puentes, de forma que cada uno de ellos se cruzase una sola vez y se comenzara y terminara el recorrido en un mismo punto de la ciudad.

A partir de ese planteamiento, Euler realizó una abstracción del mapa de la ciudad representando por puntos cada una de las zonas de la ciudad que los puentes delimitaban y por líneas entre esos puntos los propios puentes. Con ello modelizó la situación de la ciudad por medio de un grafo, cuyo estudio le permitió dar respuesta negativa al problema planteado.

Otro de los problemas que también es considerado como el origen de la teoría de grafos es el relativo al coloreado de mapas. Como es bien sabido, este problema, formulado en 1852 por Francis Guthrie, consistía en identificar el menor número de colores necesarios para colorear cualquier mapa de forma que dos países conexos fronterizos (con frontera no puntual) no tuviesen el mismo color. La solución al problema se obtuvo más de un siglo después, llegando a la conclusión de que tal número es 4 (Appel y Haken, 1977a, 1977b; Guthrie, 1880) y dando lugar a lo que se conoce como teorema de los cuatro colores o teorema de la minimalidad cromática (Gonthier, 2008; Wilson, 2013).

Independientemente del origen concreto de la teoría de grafos, lo destacable es la amplia variedad de campos en los que esta teoría ha tenido y tiene aplicación hoy en día. Para todos ellos las técnicas de la teoría de grafos resultan ser herramientas esenciales de investigación. Entre estos campos se encuentran: la matemática, la probabilidad, la investigación operativa, la física, la química, la psicología, la sociología, la antropología, las ciencias de la educación, la pedagogía, la biología, la lingüística, la filología, la criptografía, la genética, las telecomunicaciones, la política, el arte, la fotografía, el deporte, la electrónica, la economía, la arquitectura, la ingeniería del transporte, etc.

En todos ellos es la posibilidad de organización de algún tipo de información en forma de red, lo que permite su modelización mediante grafos y su consecuente análisis estructural gracias a las técnicas propias de la teoría de grafos. En cada uno de los casos el tipo de análisis concreto y la elección de las técnicas apropiadas se realizan acorde a las características de la información recogida y el tipo de red y, de ahí, la gran variedad de investigaciones existentes al respecto.

El objetivo de este capítulo no es la presentación de un estudio exhaustivo de todas las aplicaciones de la teoría de grafos, por lo que se presentan únicamente algunas de ellas a modo de muestra del amplio abanico existente.

Unas de las aplicaciones quizá más conocidas de la teoría de grafos son las relativas a redes de circulación y transporte. La modelización de este tipo de redes se realiza mediante digrafos donde los nodos suelen ser ciertos lugares tales como hogares, ciudades, estaciones, aeropuertos, etc. y los arcos vías de conexión como calles, carreteras, vías férreas, vías aéreas, etc.

Ejemplo de ellos son análisis de redes de carreteras (Garrido, 1995), de redes de transporte público, como el estudio de Cardozo, Gómez y Parras (2009), donde se relaciona la oferta de tal servicio público y la accesibilidad espacial que deriva de esta, o de redes ferroviarias, como el estudio de Roanes y Laita (1998) sobre la toma de decisiones en un enclavamiento ferroviario, así como las investigaciones de Roanes, Martínez, García y Roanes (2008) y Roanes, Martínez, García, Wester y Roanes (2011) donde los autores desarrollan la generación automática de las redes ferroviarias que Extremadura ha tenido a lo largo del tiempo.

Destacar también en relación a las redes de circulación y transporte, aquellas investigaciones cuyo objetivo principal es la eficiencia en la planificación de rutas. Es obvio que este tipo de estudios son de utilidad para la identificación de distancias más cortas (Restrepo y Sánchez, 2004) y que resultan además de gran interés para organizaciones cuya actividad se basa principalmente en el transporte, como empresas de distribución (Puchades, Mula y Rodríguez, 2008), planificación de recogida de residuos urbanos (Bautista y Pereira, 2002; Carlos, Gallardo y Colomer, 2011) o para análisis de reducción de problemas de impacto ambiental tras la planificación de rutas (Correa, Cogollo y Salazar, 2012), entre muchos otros.

Otro tipo de aplicaciones también muy usuales de la teoría de grafos son las relativas al orden, entre las que se encuentran la planificación de procesos. En ellas la modelización se realiza mediante digrafos en los que los nodos suelen representar acontecimientos y las aristas actividades para las que se consideran ciertos tiempos de inicio y de ejecución. Para planificaciones a gran escala en las que es necesario coordinar una gran cantidad de actividades interrelacionadas suelen emplearse los métodos PERT (Program Evaluation and Review Tasks) y CPM (Critical Path Method). Estos métodos están basados en la teoría de grafos y proporcionan medios analíticos para la programación de actividades (Sánchez y Anguera, 1993; Recuero, Río y Álvarez, 1994; López y Morán, 2010). Se emplean además en multitud de contextos diferentes, entre los que destaca la organización industrial, de forma que la obtención de una solución óptima puede ser de gran utilidad para los responsables del proceso industrial en cuestión.

Señalar también aplicaciones relacionadas con el análisis de producción científica. Las redes utilizadas en este tipo de aplicaciones son redes de citaciones, en las que los nodos suelen representar publicaciones académicas y las aristas citaciones de un trabajo académico a otro (Molina, Muñoz y Domènech, 2002; Clough, Gollings, Loach y Evans, 2014). Estudios de este tipo sobre producción científica son de mucha utilidad para, por ejemplo, la identificación de tendencias en el desarrollo de líneas de investigación y el comportamiento de colaboraciones científicas entre individuos, universidades, compañías, revistas, disciplinas científicas o países. Nombrar también al respecto investigaciones sobre redes tecnocientíficas en las que se tienen en cuenta palabras clave, investigadores y revistas (Pino, Jiménez, Ruíz y Bailón, 2011), así como análisis de impactos de revistas científicas (Leydesdorff, 2007).

Aplicaciones de la teoría de grafos, relacionadas también con el ámbito académico, son las relativas a las redes de participantes en tribunales de tesis doctorales en un área determinada durante un periodo de tiempo (Santos, del Olmo y Pajares, 2006).

Otro de los campos donde existe gran cantidad y variedad de investigaciones fundamentadas en las técnicas de la teoría de grafos es la medicina. Es el caso, por ejemplo, de estudios sobre la visualización mediante grafos de la propagación de enfermedades contagiosas, como el virus de la gripe A (Camino, 2012) o sobre las alteraciones que provoca la enfermedad de alzheimer en los patrones de conectividad de la actividad encefalográfica (Poza et al., 2012). Destacar también investigaciones basadas en el análisis de la actividad eléctrica del cerebro, como el trabajo de Soletta, Farfán y Ruiz (2011) relativo a la distinción entre distintos estados mentales o el de Romo, Vélez, Solís, Luna y Espinoza (2015) en el que los autores estudian la epilepsia mediante teoría de grafos, determinando y analizando las regiones cerebrales que sustentan la actividad del cerebro durante una crisis epiléptica.

En relación con la arquitectura, señalar, por ejemplo, el trabajo de Sánchez, Moratalla y Sanz (2012) en el que los autores analizan diseños arquitectónicos desde un punto de vista topológico (su conectividad), para lo que emplean grafos en los que los nodos representan los diferentes espacios del diseño arquitectónico y las aristas la existencia de paso entre ellos. Destacar también la revisión de las aplicaciones arquitectónicas de la teoría de grafos realizada por Dawes y Ostwald (2013).

En el ámbito educativo y dentro de la multitud de investigaciones realizadas en torno a los libros de texto (véase apartado 1.2. Concreciones curriculares. Libros de texto), existen también trabajos como el de Calderero (2003) en el que se hace un análisis mediante teoría de grafos sobre el vocabulario específico empleado en libros de texto de ciencias de la naturaleza.

En referencia a disciplinas como la psicología y la sociología, la teoría de grafos resulta de gran utilidad para el estudio de relaciones humanas mediante el análisis de la comunicación entre individuos. En este contexto y, muy relacionado con la sociometría (Moreno, 1954; Hoffman, 2001), tiene cabida una técnica de investigación social de gran actualidad: el análisis de redes sociales (SNA, por sus siglas en inglés).

En términos generales, el análisis de redes sociales trata de estudiar determinados datos relacionales provenientes de sistemas sociales, datos que modeliza a través de grafos y analiza mediante técnicas propias de la teoría de grafos. Concretamente, autores como Monsalve (2008), lo definen como un área de investigación que estudia las redes sociales como grafos, pudiendo explicar así la macrosociología a partir de la microsociología.

En la actualidad, hay que tener en cuenta que una de las primordiales fuentes de datos sociológicos para la creación de redes sociales lo constituyen, sin duda, las aplicaciones online y sitios web, tales como Twitter, Facebook, Linkedin, Tuenti, Youtube, foros, chats, intercambio de correos electrónicos, etc. La gran variedad de relaciones sociales que pueden deducirse a partir de ellos, junto con la elevada participación social, permite disponer en tiempo real de una gran cantidad de información sobre temas de interés actual. Ello, unido a la existencia de sencillas herramientas que permiten una extracción de la información existente en estas aplicaciones online y sitios web y su puesta a punto para ser analizada -es el caso, por ejemplo, de Netvizz[15] para Facebook- las convierte en punto obligado de investigación.

Así, por ejemplo, existen trabajos en los que se describe como tratar los datos en Twitter para analizar la red que constituyen sus usuarios (Zheng, Alonso y García, 2013), investigaciones en las que se ofrece una caracterización topológica de la red de usuarios de Twitter mediante la modelización de un grafo dirigido (Myers, Sharma, Gupta y Lin, 2014) y estudios en los que se proponen técnicas basadas en similitud de grafos para la determinación de un tema dado un mensaje de Twitter (Cordobés et al., 2013), entre otros.

Destacar también trabajos centrados en el análisis de foros, como el de los autores Álvarez, Kuz y Falco (2013), que estudian mediante la teoría de grafos las interacciones existentes en un foro de alumnos para la detección y el diagnóstico del clima escolar, lo que les permite el conocimiento de la estructura social del alumnado, diferenciando diversos roles.

Aplicaciones también muy interesantes de la teoría de grafos relativas al ámbito digital corresponden a la modelización y análisis de la World Wide Web como un digrafo, en el que los nodos son las diferentes páginas web y los arcos los enlaces entre ellas (Kleinberg, Kumar, Raghavan, Rajagopalan y Tomkins, 1999). Este tipo de grafos se denominan ‘grafos web’ y los recursos que representan pueden ser recopilados mediante crawler o arañas web tales como WIRE (Web Information Retrieval Environment) (Castillo y Baeza-Yates, 2005).

[15] https://apps.facebook.com/netvizz/

Señalar también, por otro lado, aplicaciones singulares tales como la modelización mediante grafos de ciertos juegos de estrategia (Martín y Méndez, 2004), análisis de propagación del fuego (Nieto, 2013), análisis de las acciones que se realizan en el desarrollo del contraataque en balonmano (González, 2011), estudio de la segmentación en imágenes astronómicas, donde la modelización se realiza mediante grafos cuyos nodos representan píxeles y las aristas adyacencia de píxeles (Gómez, Zarrazola, Montero y Yañez, 2012), etc.

Todo lo anterior supone una pequeña muestra del gran abanico de aplicaciones que posee la teoría de grafos en el campo de la investigación en todos aquellos ámbitos en los que la información fuente de estudio admite una estructura en forma de red.

CAPÍTULO 8

SOFTWARE PARA VISUALIZACIÓN Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN CON ESTRUCTURA DE RED

Como se ha mostrado anteriormente, toda información con estructura en forma de red puede ser modelizada mediante un grafo y, por tanto, analizada mediante técnicas propias de la teoría de grafos.

Las diferentes formas de representación de un grafo (véase apartado 6.2. Formas de representación de un grafo), así como algunos análisis del mismo, pueden ser realizados de forma manual cuando el orden y el tamaño del grafo en cuestión lo permiten. Sin embargo, a medida que estos valores aumentan, lógicamente se incrementa la complejidad de la estructura del grafo y, con ello, toda representación y análisis. En estos casos una alternativa al tratamiento manual lo constituye el empleo de software especializado en la representación y análisis de información con estructura de red.

En cuanto a la representación gráfica de un grafo de orden y tamaño elevados, el uso de técnicas de visualización propias de un software especializado supone una serie de ventajas con respecto a la representación manual del mismo, entre las que se encuentran: la calidad de visualización, el uso automático de propiedades estéticas, la posibilidad de cambios de escala (zoom), etc.

En lo relativo a un análisis numérico, no cabe duda que las posibilidades en cuanto a las técnicas y la velocidad de ejecución que pueda ofrecer un software especializado superan todo análisis manual.

Además, la combinación de ambos tipos de análisis de un grafo, el gráfico y el numérico, conlleva una riqueza analítica del mismo y, en consecuencia, de la información que este representa.

Si bien es cierto que existe una gran variedad de software de representación gráfica y análisis de grafos, esta variedad aumenta notablemente si se consideran las aplicaciones de reciente desarrollo con motivo de la necesidad de análisis de la gran cantidad de información proveniente de las actuales redes sociales. A fin y al cabo, las plataformas de redes sociales contienen información que puede estructurase en forma de red y que, por tanto, puede modelizarse mediante grafos. Con ello y, a pesar de introducir terminología propia, el análisis de redes sociales (Knoke y Yang, 2008; Scott, 2012) se fundamenta en técnicas propias de la teoría de grafos.

Por todo ello la mayoría de las aplicaciones de análisis de redes sociales pueden emplearse en una gran variedad de ámbitos sin necesidad de pertenecer a su propio campo, motivo por el que resulta evidente que las posibilidades de software para el análisis de grafos se han visto beneficiadas.

Existen así multitud de herramientas para el citado propósito y de muy diversa tipología, pudiéndose diferenciar además entre herramientas de uso comercial o de libre distribución o uso público, de código abierto o cerrado, que requieran conocimientos de programación o no para su uso, que se encuentren más especializadas en visualización o análisis numérico o en ambas cosas, etc.

Pueden distinguirse además, por un lado, aplicaciones listas para ser usadas y, por otro, entornos y lenguajes de programación, así como librerías y paquetes desarrollados para la construcción de nuevas herramientas.

Entre estos últimos destacar, dentro del entorno de programación estadístico R[16], paquetes como tnet, statnet[17] (Goodreau, Handcock, Hunter, Butts y Morris, 2008), SNA (Butts, 2008) o

[16] http://www.r-project.org

librerías como iGraph[18] (Csárdi y Nepusz, 2006) o NetworkX[19] (Schult y Swart, 2008), todos ellos para el análisis de redes. Comentar que estas librerías -iGraph y NetworkX- se emplean también con el mismo fin en el lenguaje de programación Python[20] (Duque, 2011), e iGraph además, para lenguaje C / C ++. Mencionar, asimismo, la librería de Java JUNG[21] (Java Universal Network/Graph) (O'Madadhain, Fisher, White y Boey, 2003), así como el Paquete de redes complejas de MatLab[22]. Señalar también en este sentido NodeXL[23] (Hansen, Shneiderman y Smith, 2010), un plugin para Microsoft Excel que permite además la importación directa de datos desde Twitter, Youtube, Flickr, correo electrónico, etc.

Dentro de las aplicaciones listas para su uso, mencionar, en primer lugar, aplicaciones como Grafos[24] (Villalobos, 2010) cuyo fin no es tanto un análisis avanzado de información en forma de red, sino la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de grafos y otras disciplinas mediante la construcción, edición y análisis de grafos que modelizan ciertos problemas educativos.

Señalar también la existencia de programas dirigidos a una disciplina en concreto, como Cytoscape[25] (Shannon et al., 2003; Kohl, Wiese y Warscheid, 2011), desarrollado para la visualización y análisis de redes biológicas. Cytoscape se trata de un software de código abierto con una serie de plugins disponibles y con arquitectura abierta con Java Cytoscape para la creación de otros. Destacar en el mismo sentido Sci^2 Tool[26] (Team, 2009), un software modular diseñado

[17] http://CRAN.R-project.org/package=statnet

[18] http://igraph.org/redirect.html

[19] http://networkx.lanl.gov/

[20] https://www.python.org/

[21] http://jung.sourceforge.net/index.html

[22] http://www.levmuchnik.net/Content/Networks/ComplexNetworksPackage.html

[23] http://nodexl.codeplex.com/

[24] http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/

[25] http://www.cytoscape.org/

[26] https://sci2.cns.iu.edu/user/index.php

específicamente para el estudio de la ciencia, o Network Workbench[27] (Team, 2006) enfocado a la visualización y análisis de redes para la física, biomedicina e investigación en ciencias sociales.

Además de las anteriores herramientas enfocadas a un tipo determinado de información, existen multitud de posibilidades para la representación y análisis de cualquier información, siempre y cuando esta posea estructura de red. Entre ellas se encuentra UciNet[28] (Borgatti, Everett y Freeman, 2002), un software que requiere licencia, conocimientos de programación y de otros programas tales como NetDraw[29] (Borgatti, 2002) para los procesos de visualización. Mencionar al respecto que existen, además de NetDraw, otros programas de representación visual de redes tales como GraphViz[30] (Ellson, Gansner, Koutsofios, North y Woodhull, 2002), GUESS (Adar, 2006) y Walrus[31] (Hyun, 2005).

De la misma manera que existen programas de análisis de redes focalizados en la representación gráfica, señalar que también existen otros dirigidos al análisis de tipo numérico, como el sistema de software libre en entorno Windows, StOCNET (Huisman y Van Duijn, 2003), con posibilidad de realizar análisis estadísticos avanzados de redes.

En relación a los programas que tratan, tanto el análisis gráfico como el numérico, se encuentran NetMiner[32] y MultiNet[33] (Richards y Seary, 2000), que combinan técnicas de exploración visual con análisis estadístico de redes sociales. Destacar, además de los anteriores, dos programas muy completos tanto para el análisis visual como numérico de información con estructura de red: Pajek[34] (Batagelj y Mrvar, 2014) y Gephi[35] (Cherven, 2013, 2015). Ambos, entre

[27] http://nwb.cns.iu.edu/

[28] http://www.analytictech.com/ucinet

[29] https://sites.google.com/site/netdrawsoftware/home

[30] http://www.graphviz.org

[31] http://www.caida.org/tools/visualization/walrus/

[32] http://www.netminer.com/main/main-read.do

[33] http://www.sfu.ca/personal/archives/richards/Multinet/Pages/multinet.htm

[34] http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/

[35] http://gephi.github.io/

otros muchos aspectos, son de libre distribución, no requieren conocimientos de programación para su uso y admiten grafos de orden y tamaño elevados.

Así, todas las herramientas aquí presentadas, junto con otras posibilidades existentes de software (Huisman y Van Duijn, 2005; Combe, Largeron, Egyed-Zsigmond y Géry, 2010), suponen una amplia gama de opciones para la visualización y análisis de información con estructura de red. La elección de una u otra alternativa depende ya de factores tales como el propósito concreto a conseguir, la tipología y cantidad de información que se posee, la disposición de uno u otro software, etc.

En el caso de la presente investigación se ha decidido emplear una combinación de dos aplicaciones: Pajek y Gephi, razón por la que a continuación se muestran algunas de sus propiedades. Cabe mencionar al respecto que el objetivo de los siguientes apartados no es la descripción detallada de cada una de estas aplicaciones, sino la presentación de aquellas características que permitan el entender mejor los procesos realizados con ambos programas en la parte aplicada de este estudio.

8.1. Software Pajek

Pajek[36] (Batagelj y Mrvar, 1998, 2004; de Nooy, Mrvar y Batagelj, 2011; Batagelj y Mrvar, 2014) -traducción del esloveno 'araña'- es un software gratuito, para sistemas operativos Windows, de visualización y análisis de redes. Ofrece la posibilidad de combinar análisis numéricos y visuales con la finalidad de obtener una información rigurosa y extensa sobre la estructura de los datos que trata. Desarrollado por Vladimir Batagelj y Andrej Mrvar, de la Universidad de Ljubljana, Eslovenia, cuenta con una amplia comunidad que permite un constante desarrollo de mejoras.

Cabe mencionar, en primer lugar, que este software posee la opción del uso de macros[37], lo que permite tanto la optimización de tareas repetitivas como la adaptación del programa en función de las necesidades del usuario en cada momento. El grado de adaptación es bastante elevado, ya que

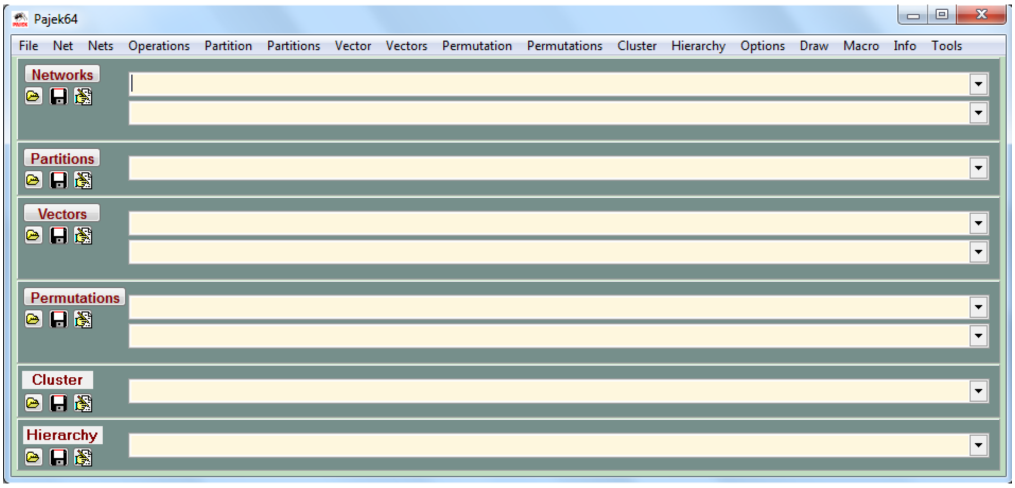
[36] http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/

[37] http://mrvar.fdv.uni-lj.si/pajek/macro.htm

además de la amplia variedad existente de macros ya creadas, el programa ofrece al usuario la posibilidad de desarrollar otras nuevas.

Pajek está organizado en una serie de estructuras de datos: redes, particiones, vectores, permutaciones, clusters y jerarquías. En relación con este estudio mencionar que se hace uso notable de las estructuras de redes y, con ello, implícitamente, de las estructuras de grafos. Puesto que, además, el programa está diseñado especialmente para el tratamiento de una gran cantidad de datos, admite en particular grafos de orden y tamaño elevados. En la Figura 18 se muestra una imagen de la interfaz del programa.

Figura 18. Imagen de la interfaz de Pajek 64 2.05



Los grafos en Pajek se definen acorde a la teoría de grafos, esto es, mediante el listado de nodos y el listado de aristas que lo constituyen -arcos en el caso de digrafos-. El programa utiliza diferentes tipos de formato de archivo, entre los que se destaca el formato NET. Aunque Pajek admite grafos atendiendo a las diferentes formas de representación numérica de grafos, tales como listas de adyacencia (véase apartado 6.2. Formas de representación de un grafo), se emplea en este estudio su definición mediante el listado de nodos y el listado de aristas que forman el grafo en cada caso.

Para este tipo de definición es preciso asignar un identificador numérico (número entero positivo) a cada nodo del grafo y trabajar a partir de este, pudiéndose utilizar únicamente el nombre del nodo como etiqueta. Así, las aristas -arcos en el caso de digrafos- se establecen mediante los pares de identificadores numéricos correspondientes.

En la Figura 19 se muestra, a modo de ejemplo, este tipo de definición para el digrafo $G = (V, A)$ dado por el conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de arcos $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$.

Figura 19. Definición del digrafo G en formato de archivo de Pajek

```
*Vertices 5
1 "v0"
2 "v1"
3 "v2"
4 "v3"
5 "v4"
*Arcs
1 2
1 5
2 3
2 4
2 5
3 4
3 5
4 5
```

Fuente: elaboración propia mediante Bloc de notas

Como puede observarse, el fichero se inicia con **Vertices*, seguido de la cantidad de nodos que componen el digrafo. A continuación figura el listado de nodos según el identificador numérico de los mismos, asociando a cada uno de ellos su etiqueta entre comillas. Así, en este caso, los números 1, 2, 3, 4 y 5 corresponden a los identificadores numéricos de los cinco nodos del grafo, siendo v0, v1, v2, v3 y v4 sus etiquetas respectivas. Seguidamente se señala el inicio del listado de arcos mediante **Arcs* y se describen los mismos, uno en cada línea, a partir de los identificadores numéricos de los nodos que los definen, situando el nodo origen del arco en el lado izquierdo y el nodo destino en el lado derecho.

Esta forma de definición, además de poder realizarse de manera manual, puede introducirse a partir de un fichero de texto plano o de un archivo de Microsoft Excel en el que figuren únicamente el listado de aristas o arcos que lo componen, definidos mediante los nombres de los pares de nodos correspondientes.

Así, para el digrafo del ejemplo anterior, los citados ficheros de texto plano y de Microsoft Excel tienen la estructura que se muestra en la Figura 20.

Figura 20. Definición del digrafo G en fichero de texto plano y Microsoft Excel

Fichero de texto plano	Fichero de Microsoft Excel		
		A	B
v0 v1	1	v0	v1
v0 v4	2	v0	v4
v1 v2	3	v1	v2
v1 v3	4	v1	v3
v1 v4	5	v1	v4
v2 v3	6	v2	v3
v2 v4	7	v2	v4
v3 v4	8	v3	v4

Fuente: elaboración propia mediante Bloc de notas y Microsoft Excel

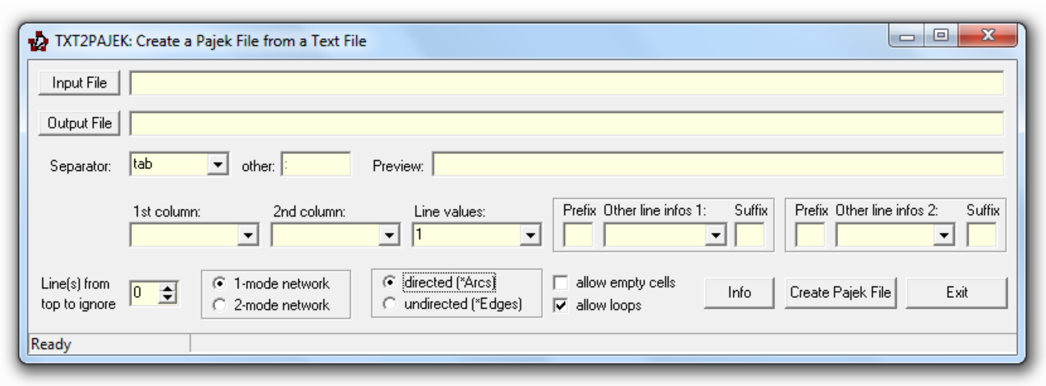
Obsérvese como, en ambos casos, la información de cada arco se muestra en una línea independiente, situando el nodo origen a la izquierda y el nodo destino a la derecha y empleando, en el caso del fichero de Microsoft Excel, dos columnas para ello.

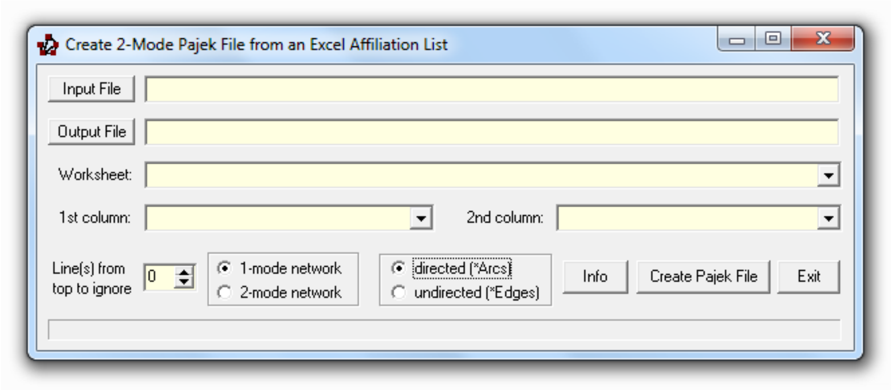
Así, a partir de cualquiera de estos dos tipos de formato de fichero, puede conseguirse fácilmente el mencionado formato NET propio de Pajek mediante el uso de dos sencillos programas: *txt2pajek*[38] para el fichero en texto plano y *createpajek*[39] para el fichero de Microsoft Excel. La interfaz de los dos programas se muestra en la Figura 21.

[38] http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/howto/text2pajek.htm

[39] También conocido como excel2pajek.
http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/howto/excel2pajek.htm

Figura 21. Interfaz de los programas text2pajek y createpajek





En ambos programas solamente debe importarse su fichero correspondiente y de forma inmediata se obtiene un fichero de formato NET identificable por Pajek. Así, para los ficheros de la Figura 20 se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 22.

Figura 22. Ficheros en formato NET exportados por text2pajek y createpajek

text2pajek	createpajek
*Vertices 5 1 "v0" 2 "v1" 3 "v4" 4 "v2" 5 "v3" *Arcs 1 2 1 3 2 4 2 5 2 3 4 5 4 3 5 3	*Vertices 5 1 "v0" 2 "v1" 3 "v2" 4 "v3" 5 "v4" *Arcs 1 2 1 5 2 3 2 4 2 5 3 4 3 5 4 5

Fuente: elaboración propia mediante text2pajek y createpajek

Téngase en cuenta que, en esta ocasión, son los propios programas -*txt2pajek* y *createpajek*- los que asignan un identificador numérico a cada nodo, estableciendo los nombres dados en su definición mediante el listado de arcos, como etiquetas de los mismos. Es preciso señalar que, aunque lógicamente los dos ficheros definen el mismo grafo, la asignación del identificador de cada nodo se ha realizado de forma diferente en cada uno de los programas. El motivo es que la asignación se realiza de forma correlativa acorde a la lectura del fichero de entrada, sin asignar nuevo identificador a aquellos nodos que se van repitiendo, siendo esta por filas en el caso de *text2pajek* y por columnas en el caso de *createpajek*.

Una vez descritas algunas de las posibilidades para la creación de ficheros de definición de grafos en Pajek, cabe señalar la gran variedad de opciones que este programa presenta en relación al análisis numérico. Así, además de ofrecer procedimientos tanto a nivel global (de grafo) como a nivel local (de nodo), posee la alternativa de ampliar tales análisis reclamando al entorno de programación estadístico R y a sus paquetes para el cálculo de estadísticas adicionales, así como al programa estadístico SPSS (Statistical Package for the Social Sciences)[40].

En relación con la presente investigación, cabe destacar la posibilidad que posee este software de calcular la clausura transitiva de un digrafo dado (véase apartado 6.4. Clausura transitiva de un grafo). Si bien no se trata de una posibilidad directa, esto es, no existe un comando que permita tal cálculo, la opción es viable mediante la combinación de dos acciones.

Concretamente, para su determinación se tiene en cuenta la relación existente entre la matriz de adyacencia del cierre transitivo de un digrafo y la matriz de caminos del digrafo en cuestión (véase apartado 6.3. Matrices de accesibilidad asociadas a un grafo).

Los dos pasos a seguir con el software Pajek para el cálculo de la matriz de adyacencia de la clausura transitiva de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ son exactamente los mismos. Así, en primer lugar, se calcula la matriz B_G^{n+1} asociada al grafo $G = (V, E)$ -acción que sí permite Pajek- y, en segundo lugar, se realiza la reducción de dicha matriz a una matriz booleana -acción que también permite Pajek-. De esta manera, la determinación de la clausura transitiva de cualquier grafo es posible mediante este software.

[40] www.ibm.com/software/es/analytics/spss/

Otro de los aspectos clave que ofrece este software para la presente investigación, como podrá comprobarse con posterioridad, es la posibilidad de identificar el subgrafo intersección de dos subgrafos concretos de un digrafo dado. Estos dos subgrafos son: por un lado, el formado por el conjunto de sucesores o espectro transitivo de un nodo dado y, por otro lado, el formado por el conjunto de predecesores o espectro transitivo inverso de otro nodo dado (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos).

Además de lo anterior, destacar también la posibilidad que ofrece Pajek de eliminar de forma rápida y sencilla las aristas múltiples existentes en un grafo, de forma que únicamente se considere tras tal eliminación un representante de cada una de ellas. De manera similar se puede dejar un representante de cada arco múltiple existente en un digrafo. Mencionar además la opción que este software posee de identificación de bucles tanto en grafos como en digrafos.

En lo que respecta al análisis visual, Pajek posee propiedades gráficas muy avanzadas, ofreciendo, además, diversos formatos de exportación de representaciones gráficas, entre los que se encuentran: BMP (mapa de bits), EPS (PostScript encapsulado) y SVG (Scalable Vector Graphics). Asimismo, permite la personalización de tales representaciones, pudiendo especificar ciertas propiedades de los elementos de la imagen, tales como: color, tamaño y forma de nodos, color, grosor y trazado de aristas, especificación del tipo de fuente de etiquetas, posición exacta de etiquetas respecto a los nodos, etc.

Para la realización de un análisis visual más rico, Pajek posee también diferentes algoritmos de diseño y disposición de los elementos del grafo sobre el que se aplica, esto es, sus nodos y aristas. Así, además de la disposición *Circular* y el dado por *EigenValues* basado en el algoritmo de Lanczos (Lanczos, 1950), destacar los algoritmos conocidos como dirigidos por fuerza (force-directed), como el de *Kamada-Kawai* (Kamada y Kawai, 1989) o el de *Fruchterman-Reingold* (Fruchterman y Reingold, 1991).

Cabe mencionar que el algoritmo de distribución *Kamada-Kawai* sigue un procedimiento que simula una curiosa combinación de dos procesos físicos. Por un lado, los nodos del grafo en cuestión se consideran cargas eléctricas del mismo signo, mientras que, por otro lado, las aristas reproducen el comportamiento de muelles entre los nodos. Concretamente, la fuerza de atracción que ejercen tales muelles es proporcional a la longitud del camino más corto (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos) que une cada par de nodos del grafo, motivo por el que este algoritmo realiza agrupaciones de nodos acordes al valor de tales longitudes.

Esta combinación de procesos, en la que mientras las cargas eléctricas tienden a repelerse, los muelles tienden a unirlas[41], consigue, partiendo de una distribución inicial cualquiera de los nodos del grafo, una continua e iterativa reorganización de la disposición espacial de los mismos hasta conseguir una posición de equilibrio, momento en el que el algoritmo concluye.

En lo que al algoritmo de *Fruchterman-Reingold* respecta, se trata de un algoritmo clásico, en el sentido de que las fuerzas se aplican de forma que distribuyen los nodos del grafo de forma homogénea a lo largo del área delimitada para la representación gráfica.

Mencionar que, aunque ambos algoritmos ofrecen muy buenos resultados, si bien el algoritmo de *Fruchterman-Reingold* los ofrece aún mejores, su convergencia comparada con el algoritmo de *Kamada-Kawai* es un poco más lenta. Es por ello por lo que normalmente se aconseja realizar una primera disposición de nodos mediante el algoritmo de *Kamada-Kawai* y continuar a partir de esta disposición de inicio con el algoritmo de *Fruchterman-Reingold*.

Con todo lo anterior, el software Pajek ofrece posibilidades muy interesantes para el presente estudio, como podrá comprobarse con detalle en la parte aplicada del mismo. Es más, además de las aquí desarrolladas, este software posee muchas más opciones que hacen que Pajek sea una herramienta de gran ayuda para investigaciones de diversa índole, tales como análisis de redes de colaboraciones científicas (Peñaranda, Quiñones y Osca, 2009), redes de parentesco (White, Batagelj y Mrvar, 1999), etc.

8.2. Software Gephi

Gephi[42] (Bastian, Heymann y Jacomy, 2009; Cherven, 2013; Heymann, 2014; Cherven, 2015) es uno de los paquetes de software más utilizados para la visualización, exploración y análisis de grafos. Se trata de un software libre multiplataforma (Windows, Linux, Mac) de código abierto escrito en Java. Un primer aspecto a destacar es que posee un paquete de software, independiente de su interfaz, mediante el que pueden crearse plugins propios en lenguaje de programación Java,

[41] Otra forma de simular el proceso de los algoritmos dirigidos por fuerza es imaginar que los nodos actúan como cargas magnéticas, de forma que todos ellos se repelen entre sí, salvo aquellos que son adyacentes, que, por el contrario, se atraen.

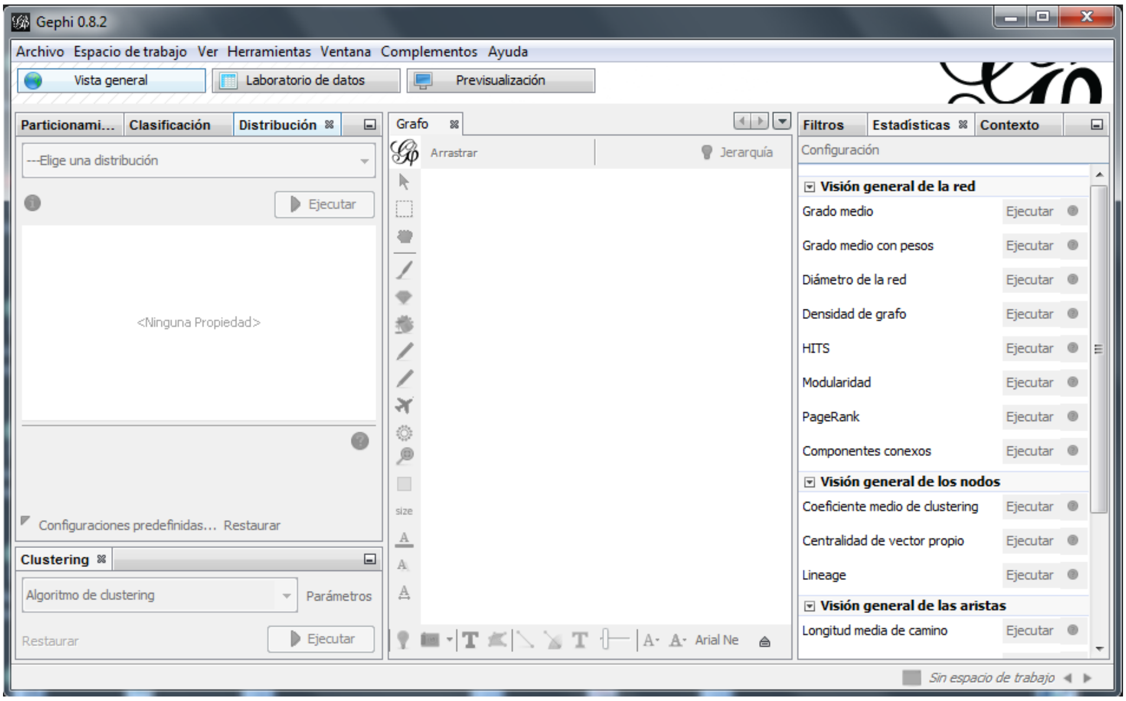
[42] www.gephi.org

además de los ya existentes[43] para ampliar sus funcionalidades. Así, gracias a esta arquitectura modular, el programa se encuentra en constante evolución.

Con ello, aunque fue creado en el año 2008 por un pequeño equipo (Bastian et al., 2009), cuenta en la actualidad con un foro[44] y un grupo de Facebook[45] muy activos en los que participan personas que desarrollan plugins para el programa, además de compartir todo tipo de aspectos relacionados con el mismo.

Por otro lado, la interfaz de Gephi es muy intuitiva y está formada por diferentes espacios de trabajo (Vista general, Laboratorio de datos, Previsualización, Panel de estadísticas, etc.) que interactúan entre sí, lo que permite una clara y sencilla vinculación entre la representación gráfica y la numérica del grafo con el que se trabaja. Una imagen de la interfaz se muestra en la Figura 23.

Figura 23. Imagen de la interfaz de Gephi 0.8.2 beta



[43] https://marketplace.gephi.org/

[44] www.forum.gephi.org

[45] https://www.facebook.com/groups/gephi/

Este software está preparado además para grafos de orden de hasta 50.000 nodos y de tamaño de hasta 500.000 aristas o arcos, lo que permite el análisis de grandes cantidades de información estructurada en forma de red.

A su vez, Gephi admite múltiples formatos de ficheros de datos, desde NET -el propio de Pajek- (véase apartado 8.1. Software Pajek), hasta otros tales como: GEXF, GDF, GML, CSV, etc.

En la presente investigación, para la importación de datos relativos a grafos, se ha optado bien por emplear archivos NET, ya creados para el tratamiento con Pajek, o bien archivos CSV. Señalar que la consecución de un archivo CSV es realmente sencilla a partir de un archivo Microsoft Excel, ya que no hay más que guardar este último mediante la opción existente de 'fichero CSV delimitado por comas'.

En caso de emplear ficheros de este formato, es preciso tener en cuenta que la definición de un grafo debe realizarse de forma independiente a partir de su listado de nodos y su listado de aristas -arcos en el caso de digrafos-. Respecto a los nodos, Gephi trabaja -al igual que Pajek- con un identificador para cada nodo, por lo que si se requiere de unos determinados identificadores, es necesario especificarlo. Con ello, el listado de nodos debe realizarse de forma que se emplee para cada nodo una fila y dos columnas, indicando en la primera de ellas el correspondiente identificador y, en la segunda, el nombre del nodo con carácter de etiqueta. Señalar que ambas columnas deben disponer en la primera fila de las palabras *Id* y *Label* -respectivamente- para una correcta importación de datos. Es preciso mencionar al respecto que, en caso de optar por incorporar algún tipo de atributo o característica que amplíe información sobre los nodos del grafo, estos deben situarse por columnas, de forma que en la primera fila figure el nombre que se le da al atributo en cuestión.

En relación al listado de aristas, de la misma forma que para ficheros en Microsoft Excel creados para Pajek (véase apartado 8.1. Software Pajek), este debe realizarse empleando una fila para cada una, situando en la primera y segunda columna del fichero los nodos correspondientes a cada arista. En el caso de digrafos, el nodo origen debe situarse en la primera columna y el nodo destino en la segunda. Además, en la primera fila deben ubicarse como encabezados de las columnas las palabras *Source* y *Target* respectivamente.

Comentar que, si bien existe la opción de importar un grafo únicamente mediante su listado de aristas -arcos- de forma que el propio programa deduzca a partir de ella el conjunto de nodos que lo constituyen, esta opción no permite la elección de identificadores concretos para cada nodo.

Así, considerando de nuevo el ejemplo que se viene tratando respecto al digrafo $G = (V, A)$ dado por el conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de arcos $A = \{(v_0, v_1), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$, se obtiene que la importación en Gephi de los formatos de fichero NET y CSV que se muestran en la Figura 24, dan lugar al mismo digrafo.

Figura 24. Definición del digrafo G en formato de fichero NET y CSV

Formato de fichero NET	Formato de fichero CSV	
Listado de nodos y arcos	Listado de nodos	Listado de arcos

Formato de fichero NET – Listado de nodos y arcos:

```
*Vertices 5
1 "v0"
2 "v1"
3 "v2"
4 "v3"
5 "v4"
*Arcs
1 2
1 5
2 3
2 4
2 5
3 4
3 5
4 5
```

Formato de fichero CSV – Listado de nodos:

	A	B
1	Id	Label
2	1	v0
3	2	v1
4	3	v2
5	4	v3
6	5	v4

Formato de fichero CSV – Listado de arcos:

	A	B
1	Source	Target
2	1	2
3	1	5
4	2	3
5	2	4
6	2	5
7	3	4
8	3	5
9	4	5

Fuente: elaboración propia mediante Bloc de notas y Microsoft Excel

En relación al análisis numérico, señalar que Gephi permite además gran variedad de cálculos, tanto a nivel local de nodo como a nivel global de grafo. Atendiendo a lo empleado en la presente investigación, cabe destacar la posibilidad que el software posee de detectar nodos con características relevantes en base, por ejemplo, a la distribución de grados del conjunto de nodos del grafo, así como la distinción entre distribuciones de grado de entrada y grado de salida para el caso de digrafos.

En relación a indicadores globales de la estructura de grafo es preciso mencionar las opciones que Gephi posee de cálculo del diámetro y grado medio de un grafo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), así como de su densidad, esto es, de la proporción de aristas que lo constituyen frente a la cantidad total de aristas que podrían existir.

Otra de las características de este software, relevante para la presente investigación, es la doble posibilidad que ofrece de agrupación de los nodos de un grafo. Por una parte, puede agrupar un conjunto de nodos en un solo nodo y gestionarlo comúnmente, esto es, analizar, por ejemplo, las conexiones con el resto de nodos del grafo. Por otra parte y, dentro de otras muchas opciones, puede identificar una partición del conjunto de nodos de un grafo atendiendo a la densidad de las aristas que los unen.

En relación a esta segunda forma de agrupación, cabe hacer alusión a la diferencia existente entre los grafos que modelan situaciones reales de cualquier ámbito (véase Capítulo 7. Aplicaciones de la teoría de grafos) y el modelo de grafo aleatorio propuesto por Erdös y Rényi (1959), en el que, dados los nodos del mismo, cada arista se crea con una cierta probabilidad independientemente del resto, de forma que dos nodos tienen una determinada probabilidad de estar conectados por una arista.

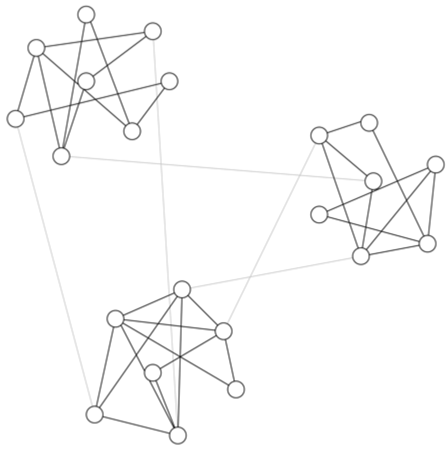
Como consecuencia de la forma en que están definidos, los grafos aleatorios poseen unas características mucho más homogéneas que los grafos que modelan ciertas situaciones reales, porque la estructura de estos últimos está muy relacionada con la información de la situación exacta que modelan.

Así, una de las características que suelen tener los grafos que modelan situaciones reales, a diferencia de los grafos aleatorios, es lo que se denomina 'estructura de clusters'. El concepto de cluster, también conocido como módulo, grupo, componente o comunidad -en terminología de redes sociales-, atiende a la densidad de las aristas entre los nodos de un grafo. Con ello, un cluster en un grafo podría definirse como un conjunto de nodos más densamente conectados entre sí que con el resto de nodos del grafo. Motivo este por el que parece lógico pensar que aquellos nodos de un grafo pertenecientes a un mismo cluster, compartan determinadas características.

Existen procesos de detección de clusters (Girvan y Newman, 2002; Clauset, Newman y Moore, 2004; Newman, 2006b; Fortunato, 2010) basados en la identificación de los nodos que deben formar cada uno de ellos. Este tipo de agrupación es conocido como 'clustering' y atiende realmente a una partición del conjunto de nodos. Esto es, al finalizar el proceso, cada uno de los nodos del grafo debe estar incluido en uno y solo uno de los clusters identificados.

En la Figura 25 puede verse una partición de un grafo en tres clusters. Obsérvese como cada uno de los nodos del grafo pertenece solamente a un cluster y como la mayoría de sus aristas se encuentran dentro de cada uno de ellos, siendo escasa la cantidad de aristas entre clusters.

Figura 25. Partición de un grafo en tres clusters



Fuente: (Girvan y Newman, 2002, p.7822)

Puesto que un proceso de detección de clusters puede llevarse a cabo de diversas formas, existen diferentes tipos de algoritmos para tal fin. Entre ellos destacan:

- algoritmos decrementales o algoritmos de división (Girvan y Newman, 2002; Castellano, Cecconi, Loreto, Parisi y Radicchi, 2004), basados en la detección y eliminación recursiva de aristas entre los diferentes clusters.
- algoritmos aglomerativos (Pons y Latapy, 2006), que agrupan de forma recursiva los nodos con un elevado número de conexiones entre sí y clusters similares.
- algoritmos de optimización (Clauset et al., 2004; Wu y Huberman, 2004; Newman, 2006a), basados en la maximización de una determinada función objetiva.

De entre estos tres tipos de algoritmos de detección de clusters de un grafo, se profundiza en el último, los algoritmos de optimización, por tratarse de la tipología de algoritmo empleada en la presente investigación.

Este tipo de algoritmos se fundamenta en la identificación de la partición óptima de un grafo en clusters de entre todas las posibles particiones de su conjunto de nodos. Para ello se define un indicador de la calidad de cada partición realizada, de forma que a cada una de ellas se le asigna un valor numérico establecido mediante una función global de calidad. Ello hace posible así una comparación cuantitativa entre las diferentes particiones.

Una de las funciones globales de calidad más utilizadas es la 'función de modularidad' propuesta por Newman y Girvan (2004). De forma precisa, esta función se define para una determinada partición $P = \{C_i\}_{i \in I}$ de un grafo $G = (V, E)$, donde I es el conjunto de índices de la partición, como:

$$Q(G,P) = \frac{1}{2m} \sum_{ij \in \{1,\ldots n\}} \left[a_{ij} - \frac{gr_G(v_i) gr_G(v_j)}{2m} \right] \delta(C_i, C_j)$$

donde n es el orden del grafo, m es su tamaño, a_{ij} es el elemento correspondiente de su matriz de adyacencia, $gr_G(v_i)$ es el grado del nodo v_i (véase apartados 6.1. Terminología de teoría de grafos y 6.2. Formas de representación de un grafo), C_i es el cluster al que pertenece el nodo v_i y $\delta(C_i, C_j)$ es la función delta de Kronecker, esto es, con valor 1 si los nodos v_i y v_j están en el mismo cluster, es decir, si $C_i = C_j$ y valor 0 en otro caso:

$$\delta(C_i, C_j) = \begin{cases} 1 \; si \; C_i = C_j \\ 0 \; si \; C_i \neq C_j \end{cases}$$

Obsérvese que el término $a_{ij} - \frac{gr_G(v_i) gr_G(v_j)}{2m}$ es positivo únicamente si los nodos v_i y v_j son adyacentes (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos) y que la contribución de la función $\delta(C_i, C_j)$ solamente se tiene si los nodos v_i y v_j pertenecen a un mismo cluster.

Con ello, la detección de clusters en un grafo se resume en la identificación de aquella partición de nodos para la que la función de modularidad alcance su máximo. Téngase en cuenta que, acorde a su definición, el valor máximo que esta función puede alcanzar es 1. Más concretamente, todos sus posibles valores se encuentran en el intervalo [-1,1], aunque en la práctica este intervalo suele corresponder realmente a [0.3,0.7], siendo un valor de la modularidad mayor de 0.3 o 0.4 un indicador de la existencia de clusters bien diferenciados.

El algoritmo de detección de clusters empleado en esta investigación es el presentado en Blondel, Guillaume, Lambiotte y Lefebvre (2008). Este algoritmo explora en cada paso la densidad de aristas entre pares de nodos, de forma que los nodos más densamente conectados entre sí y menos conectados al resto de nodos del grafo, formarán parte del mismo cluster.

Más concretamente este algoritmo se divide en dos fases principales que se repiten de forma recursiva. Se comienza así con una partición en clusters de forma que cada uno de ellos esté formado por un solo nodo. De esta forma se tienen en un primer momento tantos clusters como nodos existentes en el grafo.

Durante la primera fase, para cada uno de los nodos existentes, se consideran todos sus adyacentes y se evalúa la variabilidad de la función de modularidad al eliminar a ese nodo de su cluster de origen y ubicarlo dentro del cluster formado por su nodos adyacentes. Con ello, si la variabilidad es positiva, se considera el nuevo cluster, mientras que si es negativa se mantiene el cluster anterior. Esta primera parte del proceso se repite para cada uno de los nodos y se detiene cuando se consigue un máximo local de la función modularidad, es decir, cuando no existe movimiento individual de nodos que mejore la modularidad. Durante la segunda fase del algoritmo se crea un nuevo grafo cuyos nodos son los clusters identificados en la primera fase y con ello se repite el proceso de nuevo.

Una vez identificados los clusters, Gephi ofrece la opción de estudiarlos de forma independiente como subgrafos del grafo de partida. Además, ello puede realizarse de forma rápida y sencilla gracias a las opciones que posee el programa de filtrado dinámico a tiempo real de nodos y aristas.

Por otra parte, Gephi también ofrece la opción de estudio de los diferentes clusters de forma conjunta en el grafo, siendo ello posible gracias a la existencia de determinados algoritmos de distribución de nodos.

Así, entre la variedad de algoritmos de la que Gephi dispone, además de los ya mencionados para Pajek, cabe destacar un algoritmo: *Force Atlas* (Jacomy, Heymann, Venturini y Bastian, 2011; Jacomy, Venturini, Heymann y Bastian, 2014). Este algoritmo pertenece a la tipología de los algoritmos dirigidos por fuerza (véase apartado 8.1. Software Pajek) y agrupa los nodos en función de los clusters que identifica en el grafo. Con ello se consigue una representación gráfica del grafo en la que es posible reconocer de forma visual cada uno de los clusters. Dicha visualización es posible además gracias a opciones editables que ofrece Gephi respecto a propiedades estéticas en relación al clustering establecido.

Por otra parte, debido a que Gephi posee además un motor de renderizado, el proceso que sigue el algoritmo puede visualizarse a tiempo real, de modo que puede apreciarse todo el proceso de reagrupación de nodos y aristas hasta la consecución de la posición de equilibrio de todos los elementos del grafo en cuestión.

Además, este algoritmo posee, al igual que el resto de algoritmos de Gephi (*Distribución aleatoria*, *Circular Layout*, *Radial Axis Layout*, *Fruchterman-Reingold*, etc.), una serie de parámetros, también editables, que pueden configurarse acorde al tipo de información y objetivos deseables. Así, en el caso de *Force Atlas*, se consideran parámetros como: inercia, fuerza de repulsión y de atracción, máximo desplazamiento, auto-estabilización, fuerza y sensibilidad de auto-estabilización, gravedad, distribución de atracción, ajuste por tamaños y velocidad.

Destacar, gracias también a su motor de renderizado, la posibilidad que ofrece Gephi de interacción a tiempo real con las representaciones gráficas que genera. Ello permite, entre otros muchos aspectos, la posibilidad de resaltar, para un determinado nodo las aristas involucradas en el mismo, la opción de representación de subgrafos definidos por los nodos del grafo con ciertos atributos en común, así como la edición de las visualizaciones con un elevado nivel de personalización, lo que conlleva una representación gráfica significativa de la información que trata. Así, admite, por ejemplo, un ajuste continuo del tamaño y gama de colores de los nodos en función de ciertos indicadores analizados con anterioridad, tales como el grado, o para digrafos, el grado de entrada y el grado de salida, entre otros.

Señalar por último que el resultado de todas estas opciones gráficas puede obtenerse también en tres dimensiones, además de poder exportarse mediante representaciones gráficas en formato SVG (Scalable Vector Graphics), PNG (Portable Network Graphics) y PDF (Portable Document Format).

Todas las características anteriores y otras muchas no recogidas aquí, hacen que este programa sea de una gran riqueza para la exploración, revelación de propiedades ocultas y, en consecuencia, para la extracción de conclusiones de información con estructura de red. Es por ello por lo que este software es utilizado para multitud de proyectos de investigación contextualizados en campos muy diversos, tales como educación (Álvarez et al., 2013), sociología (Conway y White, 2012), medicina (Camino, 2012), filosofía (Raper, 2012), economía (Heymann y Le Grand, 2013), etc.

A todas las características así descritas de forma independiente para Pajek y Gephi, es preciso añadir la posibilidad que estos programas ofrecen de hacer un cómodo uso compartido, debido a que, entre otros aspectos, ambos importan y exportan archivos en formatos admitidos por el otro.

Todo ello ha influido así en la decisión de optar por Pajek y Gephi dentro de la gran variedad existente de paquetes de software para el análisis de información con estructura de red, consiguiendo de esta forma para la presente investigación una gran riqueza de análisis de los datos que en ella se consideran.

Parte II: Estudio aplicado

CAPÍTULO 9

DISEÑO Y ELABORACIÓN DEL GRAFO DE ESTUDIO

Una vez analizados los diferentes aspectos del marco teórico relacionados con la presente investigación, se describen a continuación los diferentes pasos del proceso seguido en la parte aplicada de la misma.

En primer lugar es preciso señalar que la aplicación de este estudio se centra en la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria y, concretamente, en el área de Matemáticas. El motivo de tal decisión se basa únicamente en la necesidad de acotación del campo de estudio, ya que tal aplicación puede extenderse con gran sencillez, tanto a otras etapas educativas, como a otras áreas de conocimiento.

Las razones de la elección de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria frente a otras se fundamentan, principalmente, en corresponder, por un lado, a una etapa educativa obligatoria, lo que permite realizar un estudio sobre una etapa que atañe a una gran cantidad de alumnos del sistema educativo español. Y, por otro lado, por ser, dentro de las etapas obligatorias, la última con este carácter, lo que conlleva, entre otros aspectos, a una mayor diversidad y nivel de complejidad de los contenidos que la constituyen y, en consecuencia, a una mayor riqueza de datos para la presente investigación.

Por otra parte, los motivos de la elección del área de Matemáticas, se deben, fundamentalmente, tanto a las particularidades de su estructura interna relativas a la riqueza con la que se relaciona el conocimiento que la constituye (véase Capítulo 2. Especificidades de la disciplina matemática en el contexto del estudio), como a la experiencia propia en esta área, fruto de años de estudio y dedicación.

Tras las decisiones anteriores, para la consecución del grafo de estudio, se requiere llevar a cabo una serie de acciones. Se comienza así con el diseño y elaboración de un digrafo generador suyo, para, a partir de él, y tras una serie de procesos sobre el mismo, dar lugar a una serie de digrafos que conduzcan al propio grafo de estudio.

Es preciso comentar que se hablará usualmente de 'grafo de estudio', siendo conscientes de que se trata realmente de un digrafo.

9.1. Diseño de un digrafo generador del grafo de estudio

Los objetos de este estudio se corresponden con los distintos tipos de contenidos matemáticos (conceptos, propiedades, fórmulas, etc.) dentro del saber enseñado, estando fundamentados en aquellos contenidos básicos que permiten a los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria el logro de los objetivos y la adquisición de las competencias requeridas por la materia de Matemáticas, en esos niveles. Es preciso aclarar al respecto que la concepción de contenido en el contexto de esta investigación no incluye hechos, técnicas, ni destrezas. Se ha convenido en denotar por C el conjunto de los objetos de este estudio.

Para la presente investigación se considera en el conjunto C la relación que caracteriza a los contenidos que son necesarios conocer para el aprendizaje de otro. Este nombre responde a 'prerrequisito' y tanto su definición, como su representación, se describen a continuación.

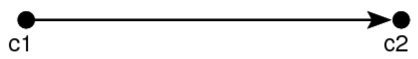
Sea C el conjunto de contenidos a tratar. Sean c_1, $c_2 \in C$. Se dice que c_1 es prerrequisito de c_2 y se representa por $c_1 \blacktriangleright c_2$ si para comprender el contenido c_2 es necesario comprender el contenido c_1.

Obsérvese que la relación así definida, basada en el aprendizaje significativo, corresponde a un tipo de relación natural de aprendizaje entre contenidos, de carácter epistemológico, en el sentido de la necesidad que supone para el entendimiento de un determinado contenido, el conocimiento de otros. Este tipo de relación se ha convenido denominar en este estudio, 'relación de requerimiento'.

Atendiendo a la definición de digrafo como un grafo $G = (V, A)$ donde A es una familia finita de pares ordenados de elementos de V llamados arcos (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), se denominará como $G = (C, A)$ al digrafo asociado a la relación, que es generador del grafo de estudio, cuya definición exacta se aportará posteriormente (véase apartado 9.2. Determinación de nodos y arcos de un digrafo generador del grafo de estudio).

Con ello, dados c_1, $c_2 \in C$ el hecho de que $c_1 \blacktriangleright c_2$ puede representarse gráficamente tal y como se muestra en la Figura 26.

Figura 26. c1 prerrequisito de c2



Fuente: elaboración propia

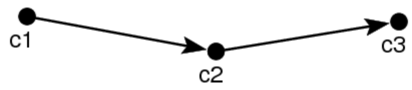
Respecto a esta relación establecida, es preciso tener en cuenta que no todos los contenidos que son prerrequisito de otro corresponden al mismo nivel de necesidad. Así, por ejemplo, siendo dos contenidos c_1 y c_2 prerrequisitos de otro contenido c_3, puede ocurrir que c_1 y c_2 también estén relacionados en ese mismo sentido, esto es, que por ejemplo, c_1 sea prerrequisito de c_2. En este caso, evidentemente c_1 es prerrequisito de c_3, pero no de forma directa. Se hace por ello necesaria la definición adoptada para este estudio de 'prerrequisito inmediato'.

Sea C el conjunto de contenidos a tratar. Sean c_1,$c_2 \in C$. Se dice que c_1 es prerrequisito inmediato de c_2 y se representa por $c_1 \triangleright c_2$ si para comprender el contenido c_2 es necesario comprender el contenido c_1 y además se verifica que $\nexists\ c_3 \in C$ tal que $c_1 \triangleright c_3 \triangleright c_2$.

La definición de prerrequisito inmediato da lugar de esta forma al concepto de relación de 'requerimiento inmediato' adoptado para este estudio.

En la Figura 27 puede verse representado gráficamente el hecho de que el contenido c_1 es prerrequisito inmediato del contenido c_2 y el contenido c_2 es prerrequisito inmediato del contenido c_3 y, sin embargo, el contenido c_1 es prerrequisito, pero no prerrequisito inmediato del contenido c_3.

Figura 27. Prerrequisito y prerrequisito inmediato



Fuente: elaboración propia

Una vez diseñado un digrafo generador del grafo de estudio mediante la descripción del tipo información que corresponde a los elementos que lo constituyen, esto es, nodos y arcos, se procede a su elaboración.

9.2. Determinación de nodos y arcos de un digrafo generador del grafo de estudio

Si se atiende a la información que representa un digrafo generador del grafo de estudio, esto es, contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria y arcos en los grafos asociados a las relaciones de requerimiento y requerimiento inmediato entre dichos contenidos (véase apartado 9.1. Diseño de un digrafo generador del grafo de estudio), es claro que se trata de una información organizada de una manera no lineal. De hecho, se identifica como una información en forma de red, lo que conduce a que un grafo sea una estructura idónea para el tratamiento de la misma (Lipschutz, 1993).

Antes de comenzar con el proceso de elaboración del grafo de estudio, es preciso tener presente su propósito de estructuración del conocimiento, concretamente, del conocimiento matemático propio de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Así, para la determinación exacta de la información que constituirán los nodos de un digrafo generador del mismo, se procede a la selección de contenidos, tomando como base la normativa que rige esta etapa educativa.

Con el fin de considerar la etapa de Educación Secundaria Obligatoria desde su origen con la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 (LOGSE, 1990), se tiene en cuenta, derivado de la misma, el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (R.D.1007/1991, 1991), así como su modificaciones por el Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre (R.D.3473/2000, 2000). Además de ello y, derivado de la Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006

(LOE, 2006), se considera el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (R.D.1631/2006, 2006) (véase Capítulo 1. El marco legal de la Educación Secundaria Obligatoria).

El propio Real Decreto 1631/2006 establece que la selección de contenidos busca asegurar el desarrollo de las competencias, por lo que parece lógico que sea la definición de competencia y, concretamente, la definición de competencia matemática, la que guíe este proceso de selección de contenidos. Atendiendo a ello, se considera el marco de los contenidos que establece la normativa educativa mencionada para la materia de Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (véase apartado 1.3. Selección, organización y secuenciación de contenidos).

Si se tiene presente el perseguido propósito de estructuración del conocimiento como ayuda a procesos tales como la planificación de la enseñanza, es obligado completar la consulta y análisis del citado marco normativo con concreciones curriculares más cercanas a un marco propositivo (Goñi, 2011). Es por ello, por lo que se ha empleado también, para la selección de los contenidos matemáticos de estudio, una muestra de libros de texto derivada de la normativa educativa mencionada.

Cabe destacar al respecto que, con el objetivo de analizar en primer lugar la viabilidad de la elaboración del grafo de estudio y su posterior análisis, se utilizaron en un comienzo únicamente cuatro libros de texto, uno para cada uno de los cuatro cursos que forman la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Un listado de los mismos puede verse en la Tabla 20. Obsérvese que los cuatro libros de texto seleccionados fueron publicados por la misma editorial, con el fin de asegurar una absoluta continuidad entre los contenidos matemáticos de los diferentes cursos.

Tabla 20. Libros de texto empleados para el análisis de viabilidad de la investigación

Primer curso
Anzola, M., Bujanda, M. P., Mansilla, S. y Vizmanos, J. R. (2006). Matemáticas 1º ESO. Madrid: SM.
Segundo curso
Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bujanda, M. P. y Mansilla, S. (2009). Matemáticas 2º ESO. Madrid: SM.
Tercer curso
Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bellón, M. y Hervás, J. C. (2006). Matemáticas 3º ESO. Madrid: SM.
Cuarto curso
Vizmanos, J. R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2008). Matemáticas B 4º ESO. Madrid: SM.

Una vez garantizada la viabilidad de la investigación utilizando, en un primer momento, esta pequeña muestra de libros de texto, se amplió notablemente el número de las fuentes de estudio, considerando un total de diez libros de texto para cada uno de los cuatro cursos de la etapa. Un listado de todos ellos se muestra en la Tabla 21.

Tabla 21. Libros de texto empleados en la investigación

Primer curso
Álvarez, M. D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M. T. y Serrano, E. (2007). *Matemáticas 1º ESO*. Barcelona: Santillana Educación.
Anzola, M., Bujanda, M. P., Mansilla, S. Vizmanos, J. R. (2006). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Ediciones SM.
Anzola, M., Bujanda, M. P., Mansilla, S. Vizmanos, J. R. (2009). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Ediciones SM.
Carrasco, M. A., Martín, R., Ocaña, J. M. y Sánchez, J. M. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Luis Vives (Edelvives).
Colera, J. y Gaztelu, I. (2006). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Grupo Anaya.
Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Grupo Anaya.
Guasch, M., Merino, R. M. y Solsona, J. (1996). *Matemáticas 1º ESO*. Barcelona: Edebé.
Miñano, A. y Ródenas, J. A. (1996). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Bruño.
Uriondo, J. L. (2007). *Matemáticas 1º ESO.* Madrid: Oxford University Press.
Vizmanos, J. R., Anzola, M., Peralta, J., y Bargueño; J. (2004). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Ediciones SM.
Segundo curso
Álvarez, M. D., Miranda, A. Y., Parra, S., Redondo, R. y Santos, T. (2003). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Santillana Educación.
Argüello, M. J., Arroyo, J. C., del Río, T., Vidal, M. D. (2003). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Luis Vives (Edelvives)
Celma, J. y Santaolalla, E. (2011). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Ediciones SM.
Colera, J. y Gaztelu, I. (2007). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Grupo Anaya.
Colera, J. y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Grupo Anaya.
García, F., Pérez, S. A., Uriondo, J. L. y Vallejo, A. (1996). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Alhambra Longman.
González, S., Cuadra, F., López, I, Trujillo, S. y Gallego, S. (2008). *Matemáticas 2º ESO.* Málaga: Ediciones Aljibe.
Vizmanos, J. R., Anzola, M., Peralta, J. y Bargueño, J. (2002). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid:

Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Peralta, J. y Bargueño, J. (2007). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bujanda, M. P. y Mansilla, S. (2009). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Tercer curso

Álvarez, M. D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2009). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Santillana Educación.

Carrasco, M. A., Martín, R., Ocaña, J. M. y Sánchez, J.M. (2007). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Luis Vives (Edelvives).

Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2005). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid : Grupo Anaya.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Grupo Anaya.

Corbalán, F., Álvarez, J. L., González, A. E., Fernández, A., Gracia, F., Hans, J. A., Muñoz, J. y Queralt, T. (2002). *Matemáticas 3º ESO.* Barcelona: Vicens Vives.

De la Llave, A. (1994). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Bruño.

Uriondo, J. L., Pérez, S. y Lobo, B. (2007). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Oxford University Press.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Peralta, J. Alcaide, F. (2005). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bellón, M. y Hervás, J. C. (2006). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bellón, M. y Hervás, J. C. (2007). *Matemáticas 3º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Cuarto curso

Álvarez, M. D., Gaztelu, A. M., González, A., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M. T., Santos, T. y Serrano, E. (2009). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Santillana Educación.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2003). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2008). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Ediciones SM.

Carrasco, M. A., Martín, R. y Ocaña, J. M. (2008). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Luis Vives (Edelvives).

Carrasco, M. A., Martín, R. y Ocaña, J. M. (2011). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Luis Vives (Edelvives).

Colera, J., Gaztelu, I. García, R., Oliveira, M. J. y Martínez, M. M. (2004). *Matemáticas B 4º ESO.*

Madrid: Grupo Anaya.

Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I., Oliveira, M. J., y Martínez, M. M. (2011). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Anaya Educación.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Grupo Anaya.

De la Llave, A. y Peral, J. C. (1994). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: Editorial Bruño.

Martínez, R.A., Ocaña, A.J., y González, L. (2004). *Matemáticas B 4º ESO.* Madrid: McGrawHill.

Obsérvese que esta muestra de libros de texto contempla diferentes editoriales, ya que, aunque es bien conocida la existencia de la escasa diferencia entre las propuestas curriculares que las distintas editoriales hacen del decreto curricular (Goñi, 2011), estas diferencias existen, por lo que un análisis conjunto de una variedad de las mismas enriquece sin duda el estudio pretendido.

Es preciso mencionar que no se ha seguido ningún criterio específico para la elección de estos libros de texto, si bien, se ha tratado de considerar una muestra representativa de las principales editoriales.

Otro aspecto relativo a la selección de fuentes que enriquece el estudio, es la variabilidad en sus años de edición. Así, con el propósito de considerar una vez más la etapa de Educación Secundaria Obligatoria desde su comienzo, se decide abarcar un intervalo de fechas lo suficientemente amplio como para disponer de una muestra significativa de estas concreciones curriculares.

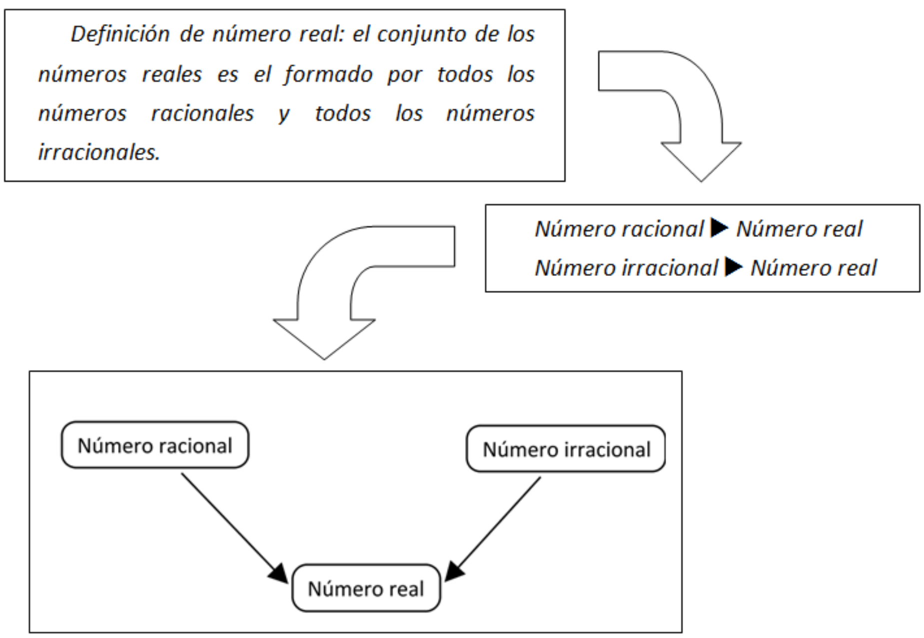
Por otra parte, téngase en cuenta que los libros de texto seleccionados para el cuarto curso se corresponden con la materia de Matemáticas B de entre las dos posibles -Matemáticas A y Matemáticas B- para este nivel educativo. Ello es debido a la decisión adoptada para la presente investigación y, en base a lo dispuesto en el artículo 8.2 del Real Decreto 1631/2006 (R.D.1631/2006, 2006), de considerar la opción con carácter propedéutico frente a la de carácter terminal y poner así el foco, además, tanto en los aspectos teóricos como en las aplicaciones prácticas de la materia (véase apartado 1.3. Selección, organización y secuenciación de contenidos).

A partir de la muestra mencionada, se han considerado entonces para cada uno de los libros de texto que la constituyen, todos los contenidos matemáticos objeto de estudio que figuran en ellos. De forma simultánea a este proceso de selección de contenidos y, en consecuencia, de determinación de los nodos de un digrafo generador del grafo de estudio, se ha llevado a cabo el establecimiento de qué contenidos están relacionados en la relación de requerimiento.

Para ello, se ha atendido a las definiciones que los libros de texto consultados disponen de cada uno de los contenidos matemáticos seleccionados. Es preciso señalar que, para este proceso, se ha tenido en cuenta tanto la diversidad en la tipología de definiciones, -en un sentido extendido del considerado por los autores[46] González y Sierra (2004)-, como la existencia de definiciones equivalentes dentro de una misma tipología en libros de texto diferentes. Con ello, y para cada uno de los contenidos seleccionados, se ha realizado una identificación de regularidades sobre el enfoque con el que cada contenido se presenta, y se han considerado los términos matemáticos que intervienen en su definición.

Así, a partir de la definición unificada de cada contenido, se han tenido en cuenta los contenidos matemáticos que intervienen en ella, y se ha considerado que el contenido definido está relacionado con aquellos contenidos que forman parte de su definición. Un ejemplo del proceso se muestra en la Figura 28, en el que se considera una definición de *número real*, así como la determinación de sus contenidos prerrequisitos y su consecuente representación gráfica atendiendo a una estructura de grafo.

Figura 28. Ejemplo de determinación de contenidos relacionados en la relación de requerimiento



[46] En su análisis relativo a los puntos críticos, destacan tres tipos de definiciones: funcionales (por ejemplo: el máximo global es el mayor valor de la función), reglas (por ejemplo: su derivada ha de ser cero) y gráficas (cuando se hace referencia, por ejemplo, a un punto, propiedad o comportamiento de una curva).

Es preciso mencionar al respecto del establecimiento de qué contenidos matemáticos de los seleccionados están relacionados entre sí en la relación de requerimiento que, además de la muestra de los libros de texto considerada, se han empleado aportaciones propias fruto del saber de años de formación y experiencia educativa en el ámbito matemático.

El conjunto de contenidos así determinado (C) y el conjunto de pares ordenados en la relación así establecidos (A) definen de forma precisa el digrafo $G = (C, A)$, generador del grafo de estudio que se considerará en la presente investigación.

9.3. Almacenamiento de nodos y arcos del digrafo generador del grafo de estudio

Con vistas al posterior análisis a través del uso de paquetes de software especializados, se procede a almacenar la información correspondiente al digrafo G, en un formato adecuado para su importación desde los mismos.

El almacenamiento de su conjunto de nodos y su conjunto de arcos se ha realizado, por ello, en un archivo de Microsoft Excel. Concretamente, se ha llevado a cabo clasificado por cursos académicos, comenzando por el primer curso y concluyendo por el cuarto curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Con el objetivo de poder contrastar y depurar la información en tiempo real, cabe mencionar que se ha empleado un único fichero para el almacenamiento de la información correspondiente a los cuatro cursos académicos.

El proceso se ha realizado de forma que, para cada uno de los cursos, se han reservado dos columnas de una hoja de trabajo de un fichero de Microsoft Excel. Así, para cada uno de los cuatro pares de columnas, se han situado en la columna de la derecha los prerrequisitos de los contenidos especificados en la columna de la izquierda, de forma que la información correspondiente a los arcos del digrafo G, ha quedado almacenada por filas. Un ejemplo ilustrativo de este proceso de almacenamiento puede verse en la Figura 29.

Figura 29. Ejemplo de almacenamiento de arcos del digrafo G

	A	B
1	Contenido 1	Contenido prerrequisito del Contenido 1
2	Contenido 2	Contenido prerrequisito del Contenido 2
3	...	...

Fuente: elaboración propia mediante Microsoft Excel

Mencionar que, en el caso habitual de que un contenido posea varios contenidos prerrequisito, y con vistas de nuevo al siguiente paso del proceso de importación de datos en los paquetes de software de análisis, se ha almacenado cada uno de los arcos del digrafo G en una fila diferente del fichero, tal y como se muestra en el ejemplo de la Figura 30.

Figura 30. Ejemplo de almacenamiento de arcos del digrafo G cuando existen varios contenidos prerrequisito

	A	B
1	Contenido 1	Contenido prerrequisito A del Contenido 1
2	Contenido 1	Contenido prerrequisito B del Contenido 1
3	Contenido 1	Contenido prerrequisito C del Contenido 1
4	...	...

Fuente: elaboración propia mediante Microsoft Excel

Por otra parte, con el objetivo de garantizar una absoluta cohesión de los elementos del conjunto A del digrafo G establecidos en los diferentes cursos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, se ha tenido en cuenta tanto la organización de contenidos en cursos y bloques de contenido presente en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (véase apartado 1.3. Selección, organización y secuenciación de contenidos), como la dispuesta en los libros de texto que constituyen la muestra definida para este estudio (véase Tabla 21).

Debido a que la organización a nivel de bloques de contenido, que en general adoptan los libros de texto, es muy similar a la que establece la propia normativa, a pesar de su carácter orientativo (véase apartado 1.3. Selección, organización y secuenciación de contenidos), y tras comprobar una vez más este hecho con los libros de texto seleccionados para este estudio, se ha decidido emplear, para la presente investigación, la organización en bloques de contenido, común a los cuatro cursos de la etapa, que se muestra en la Tabla 22.

Tabla 22. Organización de contenidos en bloques de contenido

Aritmética
Álgebra
Análisis
Medida y geometría
Estadística y probabilidad

Fuente: normativa educativa y muestra de libros de texto

Por otro lado, además de esta organización en bloques de contenido, se ha querido considerar también un nivel de organización de mayor concreción. Así, teniendo en cuenta que la normativa educativa no ofrece una organización de contenidos a este nivel, y los libros de texto como concreciones curriculares de la misma sí lo hacen, se ha adoptado, para este fin, lo encontrado en la muestra de libros de texto considerada.

Se ha estudiado así la organización a nivel de unidad didáctica de cada uno de los libros de texto que componen la muestra. Al respecto, es preciso mencionar además que, el hecho de que la organización en bloques de contenido que disponen los libros de texto, sea muy similar a la que establece la propia normativa, ha permitido organizar, de una manera sencilla, las diferentes unidades didácticas dentro de los bloques de contenido establecidos.

En relación al nivel de organización de unidad didáctica, cabe destacar que, al no existir una denominación común de esta estructuración para las diferentes editoriales y los diferentes cursos, se ha optado por considerar una estructuración propia que, además de incluir a las existentes, tiene la peculiaridad de ser común a los cuatro cursos académicos que constituyen la Educación Secundaria Obligatoria.

Con todo lo anterior, los contenidos matemáticos seleccionados para esta investigación se han organizado así en una estructura formada por dos niveles: bloque de contenido y unidad didáctica, común a los cuatro cursos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Esta organización de contenidos puede verse en la Tabla 23.

Tabla 23. Organización de contenidos en bloques de contenido y unidades didácticas

Bloques de contenido	Unidades didácticas
Aritmética	Números naturales Potencias de números naturales Raíces de números naturales Divisibilidad en los números naturales Números enteros Potencias de números enteros Raíces de números enteros Divisibilidad en los números enteros Fracciones de números naturales Potencias de fracciones de números naturales Fracciones de números enteros Potencias de fracciones de números enteros Proporcionalidad numérica Números decimales Números reales
Álgebra	Expresiones algebraicas Ecuaciones Inecuaciones Sistemas de ecuaciones
Análisis	Sucesiones Razones trigonométricas Funciones
Medida y geometría	Magnitud y medida Proporcionalidad geométrica. Semejanza Rectas y ángulos Circunferencia y círculo Figuras en el plano. Polígonos Cónicas Perímetro de polígonos Área de polígonos Movimientos en el plano. Traslaciones, giros y simetrías Geometría analítica plana Cuerpos geométricos Área de cuerpos geométricos Volumen de cuerpos geométricos
Estadística y probabilidad	Estadística unidimensional Estadística bidimensional Combinatoria Probabilidad

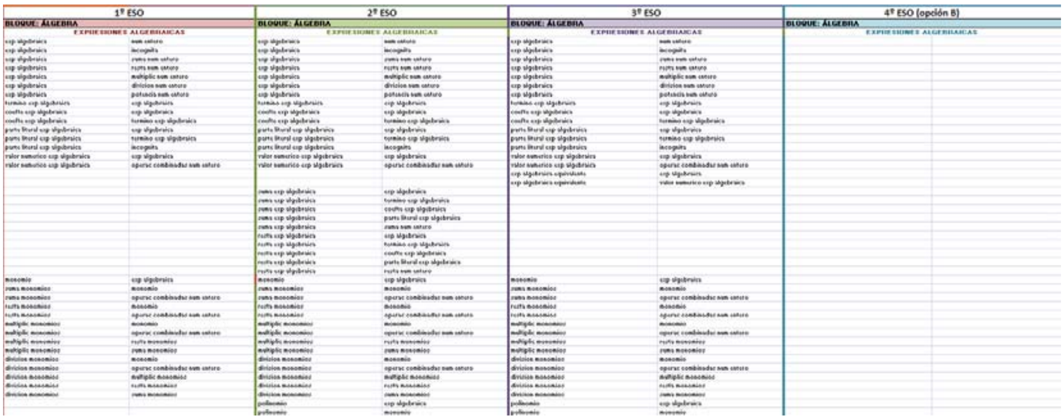
Fuente: elaboración propia a partir de la muestra de libros de texto considerada (Tabla 21)

Comentar que, la creación de esta estructuración común, ha permitido llevar a cabo el proceso de almacenamiento de arcos del digrafo G de una manera ordenada y segura, ofreciendo además la posibilidad de contrastar de forma precisa los contenidos propios de cada curso académico.

Por otro lado, debido a que lógicamente existen contenidos que son propios de uno o varios cursos pero no de todos ellos, esta forma de estructuración conserva el espacio correspondiente a esos contenidos en los cursos en los que no se imparten. Este es el caso, por ejemplo, de los *Números naturales*, contenido propio del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, pero no de los tres restantes.

Así, con el método mencionado, se ha obtenido que el conjunto A del digrafo G consta de un total de 3.925 arcos. El contenido del fichero en el que se ha realizado el almacenamiento de los mismos, y donde puede apreciarse esta estructuración, puede verse en el dispositivo de almacenamiento anexo al presente trabajo. Una pequeña parte del fichero se muestra[47] en la Figura 31.

Figura 31. Parte del fichero de almacenamiento de arcos del digrafo G



1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO (opción B)
BLOQUE: ÁLGEBRA	BLOQUE: ÁLGEBRA	BLOQUE: ÁLGEBRA	BLOQUE: ÁLGEBRA
EXPRESIONES ALGEBRAICAS	EXPRESIONES ALGEBRAICAS	EXPRESIONES ALGEBRAICAS	EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Fuente: elaboración propia

Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en la normativa educativa y en los libros de texto, las unidades didácticas y los bloques de contenido propuestos en la presente investigación no llevan asociada ninguna numeración. Este aspecto se considera fundamental para evitar

[47] Obsérvese que la información que se presenta en una misma fila, pero en diferentes cursos académicos, es exactamente la misma.

Se ha descrito el nombre de cada contenido de la forma más breve y concisa posible. Destacar que con vistas al análisis computacional posterior se han omitido tildes, letras como la ñ, así como caracteres tales como nº.

imposiciones al estudio en relación a la existencia de un orden preestablecido en la organización de los contenidos.

Una vez almacenado el conjunto de arcos del digrafo G, es preciso, con vistas de nuevo a la importación de datos en los paquetes de software de análisis, disponer de un listado de los contenidos involucrados en ese digrafo. Esto es, disponer de un listado de los elementos del conjunto C.

Debido al elevado número de arcos, y con el objetivo de determinar a partir de ellos el listado de los elementos del conjunto C, se ha decidido realizar esta tarea con ayuda computacional. Es por ello por lo que se ha creado una macro en Microsoft Excel, haciendo uso de su editor de Visual Basic, desarrollada en el lenguaje de programación Visual Basic para Aplicaciones (VBA) (Jacobson, 2007).

La función que realiza esta macro se fundamenta en la detección y posterior eliminación de elementos duplicados de un listado, en este caso, del listado de arcos del digrafo G. Una vez ejecutada la macro sobre este listado de pares ordenados, esta devuelve el listado completo de contenidos involucrados en los mismos. El listado completo de contenidos puede verse en el dispositivo de almacenamiento anexo a la memoria de la presente investigación. Señalar que se han determinado, de esta forma, un total de 814 contenidos matemáticos diferentes, por lo que el orden del digrafo G es de 814.

En referencia a datos cuantitativos sobre el orden y el tamaño del digrafo G, cabe mencionar, como era de esperar, una diferencia sustancial entre el orden y el tamaño del mismo empleando un solo libro de texto de una misma editorial para cada uno de los cuatro cursos, tal y como se hizo en la fase de análisis de viabilidad de la investigación (véase apartado 9.2. Determinación de nodos y arcos de un digrafo generador del grafo de estudio), y el orden y el tamaño del mismo como consecuencia de la utilización de diez libros de texto de diferentes editoriales para cada uno de los cursos y considerando un amplio período de fechas de edición. Todo ello, a pesar de la supuesta escasa diferencia entre las propuestas curriculares de las distintas editoriales. Los datos concretos pueden verse en la Tabla 24.

Tabla 24. Orden y tamaño de los digrafos considerados

	Un libro de texto para cada curso	Diez libros de texto para cada curso
Orden del digrafo	489	814
Tamaño del digrafo	1.675	3.925

Cabe destacar que la diferencia en el orden y el tamaño de ambos digrafos no es la única consecuencia de la ampliación de la muestra de libros de texto de cuatro a cuarenta, ya que, el haber aumentado el número y la variedad de fuentes, ha enriquecido considerablemente la organización de la información.

Es preciso señalar que, además de la mencionada función principal de la macro creada para la deducción del conjunto de nodos del digrafo G a partir de su conjunto de arcos, esta ha resultado muy útil para la depuración de la información almacenada, ya que se detectaron, gracias a ella, un total de cinco contenidos escritos incorrectamente, tanto como consecuencia de haber empleado dos nombres ligeramente distintos para un mismo contenido[48], como de su ortografía (erratas)[49].

Además de ello, el uso de esta macro ha resultado también de utilidad para comprobar que los arcos del digrafo G están bien establecidos, en el sentido de que de todo par ordenado de contenidos del primer curso se extraen contenidos, bien previos (entendiendo como previo, aquel contenido propio de cursos anteriores al primer curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria), o bien propios de primero, que en todo par ordenado de contenidos de segundo se ven involucrados contenidos previos, o propios de primer o segundo curso, que en los de tercer curso se ven involucrados únicamente contenidos previos, o propios de primero, segundo o tercero y que en los de cuarto curso se ven involucrados contenidos previos o propios de primero, segundo, tercer o cuarto curso.

Cabe destacar además, en relación a la forma de organización común llevada a cabo de los cuatro cursos académicos, que esta permite, por otro lado, apreciar con gran claridad aspectos propios del carácter espiral de los procesos de enseñanza, cuestión respaldada inequívocamente por Bruner (2004).

[48] Ejemplo: mcm nº entero y m.c.m nº entero

[49] Ejemplo: circunferiencia en lugar de circunferencia

La distribución del número exacto de contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria considerados en cada uno de los cuatro cursos académicos que la constituyen, puede verse en la Tabla 25.

Tabla 25. Distribución del número de contenidos por curso académico

Curso académico	Número de contenidos
Primero	426
Segundo	369
Tercero	367
Cuarto	257

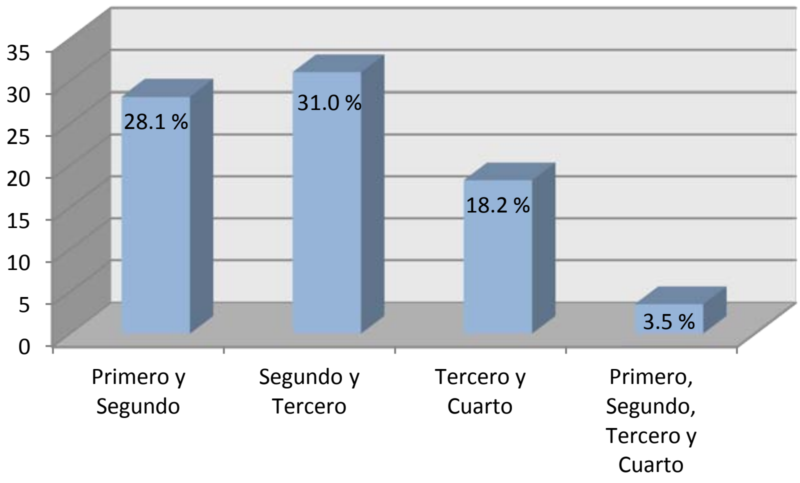
Si se analizan los contenidos existentes en más de un curso académico (véase Tabla 26), se observa como existe una organización en espiral de los mismos a este nivel, en el sentido de que ciertos contenidos de un curso académico se repiten en los cursos sucesivos, ampliándose y completándose en cada uno respecto del anterior.

Tabla 26. Distribución del número de contenidos en más de un curso académico

Cursos académicos	Número de contenidos
Primero y Segundo	224
Segundo y Tercero	247
Tercero y Cuarto	145
Primero , Segundo, Tercero y Cuarto	28

Ello significa, tal y como se muestra en el Gráfico 1, que aproximadamente el 30% de los contenidos matemáticos propios del primer curso de la etapa coinciden con los de segundo curso. De la misma manera, un porcentaje similar expresa los contenidos comunes en segundo y tercer curso. Por otro lado, si bien el porcentaje desciende a menos de un 20% entre tercer y cuarto curso, sigue siendo un dato lo suficientemente elevado que demuestra cuantitativamente un notorio carácter en espiral del currículo de esta etapa educativa.

Gráfico 1. Porcentaje de contenidos en más de un curso académico



9.4. Categorización de los nodos del digrafo generador del grafo de estudio: atributos

Una vez precisados los contenidos matemáticos y los pares ordenados de los mismos que definen el digrafo G, y determinados así, por tanto, los nodos y los arcos de este digrafo, se tienen entonces los elementos fundamentales que lo definen.

Sin embargo, con el fin de proceder a un análisis lo más rico y riguroso posible, se ha decidido categorizar los contenidos clasificándolos en diferentes categorías. Cabe señalar al respecto que esta categorización, además de ayudar en la interpretación del grafo de estudio, va a permitir el estudio de ciertos subgrafos del mismo, ya que, las diferentes categorías -atributos en terminología de grafos- van a poder emplearse como parámetro de filtrado en los paquetes de software de análisis seleccionados (véase Capítulo 8. Software para visualización y análisis de información con estructura de red).

Así, las categorías que se han considerado para el conjunto de contenidos son las correspondientes a: curso académico, bloque de contenido y unidad didáctica. Destacar que, si bien se han mantenido los bloques de contenido definidos durante el proceso de almacenamiento de nodos y arcos (véase Tabla 23), no ha sido así con las unidades didácticas, ya que, con vistas al análisis posterior, se ha decidido agruparlas en un mayor nivel. Estas nuevas agrupaciones, por motivos obvios, se han convenido en denominar unidades temáticas. La Tabla 27 muestra tal agrupación.

Tabla 27. Bloques de contenido y agrupación de unidades didácticas

Bloques de contenido	Unidades didácticas	Unidades temáticas
Aritmética	Números naturales Potencias de números naturales Raíces de números naturales Divisibilidad en los números naturales	Números naturales
	Números enteros Potencias de números enteros Raíces de números enteros Divisibilidad en los números enteros	Números enteros
	Fracciones de números naturales Potencias de fracciones de números naturales Fracciones de números enteros Potencias de fracciones de números enteros Proporcionalidad numérica	Fracciones
	Números decimales	Números decimales y números reales
	Números reales	
Álgebra	Expresiones algebraicas Ecuaciones Inecuaciones Sistemas de ecuaciones	Expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y sistemas
Análisis	Sucesiones	Sucesiones
	Funciones	Funciones
Medida y geometría	Magnitud y medida Proporcionalidad geométrica. Semejanza Razones trigonométricas	Magnitud y medida
	Rectas y ángulos Circunferencia y círculo Figuras en el plano. Polígonos Cónicas Movimientos en el plano. Traslaciones, giros y simetrías Geometría analítica plana	Figuras geométricas en el plano
	Perímetro de polígonos Área de polígonos	Medidas de figuras geométricas en el plano
	Cuerpos geométricos	Figuras geométricas en el espacio
	Área de cuerpos geométricos Volumen de cuerpos geométricos	Medidas de figuras geométricas en el espacio
Estadística y probabilidad	Estadística unidimensional Estadística bidimensional	Estadística
	Combinatoria	Probabilidad y combinatoria
	Probabilidad	

Fuente: elaboración propia a partir de la Tabla 23 (véase apartado 9.3. Almacenamiento de nodos y arcos del digrafo generador del grafo de estudio)

Con lo anterior, el listado final de los bloques de contenido considerados y las unidades temáticas que constituyen cada uno de ellos, es el que se refleja en la Tabla 28.

Tabla 28. Bloques de contenido y unidades temáticas

Bloques de contenido	Unidades temáticas
Aritmética	Números naturales
	Números enteros
	Fracciones
	Números decimales y números reales
Álgebra	Expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y sistemas
Análisis	Sucesiones
	Funciones
Medida y geometría	Magnitud y medida
	Figuras geométricas en el plano
	Medidas de figuras geométricas en el plano
	Figuras geométricas en el espacio
	Medidas de figuras geométricas en el espacio
Estadística y probabilidad	Estadística
	Probabilidad y combinatoria

Fuente: elaboración propia a partir de la Tabla 27

Una vez más, el hecho de haber llevado a cabo un proceso organizado de almacenamiento de los elementos del digrafo G (véase apartado 9.3. Almacenamiento de nodos y arcos del digrafo generador del grafo de estudio), ha permitido simplificar los procesos posteriores. En este caso concreto, la gran ventaja de esta forma de almacenamiento, se basa en la creación de una organización común de los arcos del digrafo G por bloques de contenido y unidades temáticas para los cuatro cursos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Respecto a la categorización de contenidos realizada, cabe destacar también que, debido a la propia naturaleza de la información, se trata de una clasificación en categorías no excluyentes. Así, obviamente, existen contenidos que son propios de varios cursos, de la misma manera que, los contenidos pertenecientes a una determinada unidad temática, pertenecerán, también, al bloque de contenido en el que la unidad está ubicada. Por no dejar de mencionar también, la existencia de contenidos pertenecientes a diferentes unidades temáticas.

Este último, es el caso, por ejemplo, del contenido de *Área del círculo*, perteneciente a las unidades temáticas de *Magnitud y medida* y *Medidas de figuras geométricas en el plano*, ambas incluidas en el bloque de contenido de *Medida y geometría*, además de en los tres primeros cursos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Aludir también, en este sentido, al contenido de *Sucesión de números reales*, perteneciente a la unidad temática de *Sucesiones* dentro del bloque de contenido de *Análisis* y, a su vez, a la unidad de *Números decimales y números reales*, dentro del bloque de *Aritmética*.

En base a estas consideraciones, se ha realizado así una categorización no excluyente y minuciosa de cada uno de los 814 contenidos involucrados en este estudio. La categorización de todos y cada uno de ellos se presenta en el dispositivo de almacenamiento anexo a esta investigación. Puede verse una pequeña parte de la misma en la Figura 32.

Figura 32. Categorización de los contenidos por curso, bloque de contenido y unidad temática

Contenido	Curso					Aritmética				Álgebra	Análisis		Medida y geometría					Estadística y probabilidad	
	previo	1º	2º	3º	4º	Números naturales	Números enteros	Fracciones	Números decimales y números reales	Expresiones algebraicas Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Sucesiones	Funciones	Magnitud y medida	Figuras geométricas en el plano	Medidas de figuras geométricas en el plano	Figuras geométricas en el espacio	Medidas de figuras geométricas en el espacio	Estadística	Probabilidad y combinatoria
suma n terminos progresion aritmeti	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no
progresion geometrica	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no
razon progresion geometrica	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no
termino general progresion geometri	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no
suma n terminos progresion geometr	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no
multiplic n terminos progresion geor	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no
radian	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
circunferencia goniometrica	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no
seno angulo	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
coseno angulo	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
tangente angulo	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
razon trigonometrica angulo	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
th seno	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
th coseno	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no
ejes de coord	no	si	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
origen de coord	no	si	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
sistema de coord	no	si	no	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
coordenadas punto	no	si	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
abscisa	no	si	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
ordenada	no	si	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
cuadrante	no	si	si	no	no	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
funcion	no	si	si	si	si	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no
variable depte	no	si	si	si	si	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	no

Fuente: elaboración propia

Obsérvese que, para la categorización del conjunto de contenidos, se han empleado variables boolenas. Ello con el fin de simplificar tanto la determinación de pertenencia de los contenidos a los bloques de contenido correspondientes a partir de la información sobre las unidades temáticas a las que pertenecen, como el análisis posterior del grafo de estudio. Mencionar, al respecto, que se han empleado para ello funciones lógicas propias de Microsoft Excel, lo que ha contribuido, por otra parte, a un tratamiento adecuado de la categorización no excluyente de los contenidos considerados.

9.5. Importación de nodos, arcos y atributos desde el software especializado

Una vez especificados los contenidos matemáticos y los pares ordenados de los mismos que definen el digrafo G, así como la categorización de tales contenidos en función de los cursos, bloques de contenido y unidades temáticas considerados, se posee toda la información necesaria para este estudio. Con ello, se tienen determinados los nodos, los arcos y los atributos de los nodos del digrafo G y, en consecuencia, se tiene definido un digrafo generador del grafo de estudio.

Cabe destacar que para la creación del grafo de estudio a partir de este digrafo generador suyo se precisa ayuda computacional. Para ello se hace uso de los mismos programas elegidos para su posterior análisis: Pajek y Gephi. Téngase que cuenta que estos dos programas se han seleccionado dentro de la gran variedad existente de paquetes de software para visualización y análisis de información con estructura de red (véase Capítulo 8. Software para visualización y análisis de información con estructura de red), por tratarse de dos programas que se complementan muy bien, y se adecúan notablemente a los propósitos de esta investigación. Así, tras tal elección es preciso realizar un proceso adecuado de importación de información desde los mismos.

Es preciso mencionar que este proceso de importación resulta ser bastante cómodo, debido, principalmente, a dos motivos. Por un lado, debido a las posibilidades de importación de datos que ofrecen ambos programas (véase apartados 8.1. Software Pajek y 8.2. Software Gephi) y, por otro lado, debido a la elección adecuada tanto del tipo de fichero como de la forma de almacenamiento de la información en cuestión (véase apartado 9.3. Almacenamiento de nodos y arcos del digrafo generador del grafo de estudio).

Así, partiendo del fichero de Microsoft Excel en el que se ha almacenado la información correspondiente a los arcos del digrafo G, se ha hecho uso del programa *createpajek*[50], consiguiendo, de forma inmediata, un fichero en formato NET, admisible por Pajek y Gephi, en el que figura toda la información relativa al digrafo G. Parte de ese fichero se muestra en la Figura 33.

[50] También conocido como excel2pajek.
http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/howto/excel2pajek.htm

Figura 33. Parte del fichero en formato NET que define el digrafo G

```
*Vertices 814
1 "sist. num decimal"
2 "num natural"
3 "suma num natural"
4 "resta num natural"
5 "multiplic num natural"
6 "division num natural"
...
134 "nº decimal exacto"
135 "nº decimal periodico puro"
136 "periodo num decimal"
137 "anteperiodo num decimal"
138 "aproximac num decimal"
139 "error aproximac num decimal"
140 "error absoluto"
...
809 "suceso compatible"
810 "suceso incompatible"
811 "suceso dependiente"
812 "suceso independiente"
813 "probab suceso contrario"
814 "probab union sucesos aleatorios"
*Arcs
1 2
2 3
3 504
2 4
3 4
4 505
4 506
...
164 577
29 522
24 129
164 578
157 159
47 525
52 161
...
```

Fuente: elaboración propia mediante createpajek

Obsérvese cómo el propio programa *createpajek* identifica directamente los 814 nodos, asigna un identificador numérico a cada uno de ellos, considera el nombre del contenido que cada nodo representa como etiqueta del mismo, y define cada uno de los arcos, mediante el par de identificadores numéricos correspondientes a los nodos que lo determinan.

Respecto al proceso de importación de los atributos de los nodos (véase apartado 9.4. Categorización de los nodos del digrafo generador del grafo de estudio: atributos), señalar que se ha realizado a partir del listado de nodos y categorización de los mismos mediante un fichero de formato CSV creado a partir del fichero Microsoft Excel.

Así, con los dos ficheros anteriores, y teniendo en cuenta la buena complementación entre Pajek y Gephi, se ha conseguido, de forma sencilla, un único fichero con toda la información que define el digrafo G.

Es preciso mencionar al respecto, que, para la creación de este fichero único, ha resultado primordial la coordinación de ambos programas, en el sentido de conseguir la conservación en uno de los programas del identificador numérico de cada nodo asignado por el otro. Aspecto que, por otra parte, es de suma importancia para un trabajo posterior conjunto con ambos programas.

9.6. Preproceso del digrafo generador del grafo de estudio (I): eliminación de arcos múltiples

Una vez importado el digrafo G desde el software seleccionado, y con el fin de crear el grafo de estudio, es preciso llevar a cabo una serie de procesos. Así, en primer lugar, y debido al carácter en espiral de los procesos de enseñanza (Bruner, 2004) y, en consecuencia, a la forma en que se ha realizado el almacenamiento de los arcos del digrafo G, un elevado número de esos arcos se repite en dos o más cursos académicos, motivo por el que el número de arcos completamente diferentes, se ve reducido considerablemente respecto a los inicialmente almacenados.

Existen, así, por ejemplo, contenidos comunes propios de enseñanza en los cuatro cursos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Uno de ellos, dentro del bloque de contenido de *Estadística y probabilidad* y, concretamente, dentro de la unidad temática de *Estadística*, es el concepto de frecuencia relativa del valor de una variable (*frecuencia relativa*). Puesto que uno de los contenidos prerrequisito de este concepto es la frecuencia absoluta del valor de una variable (*frecuencia absoluta*), y así consta en los cuatro cursos académicos, se tienen, en el digrafo considerado, cuatro arcos con origen el nodo correspondiente al concepto *frecuencia absoluta* y destino, el nodo correspondiente al concepto *frecuencia relativa*.

Es entonces, por casos como el anterior, por lo que se afirma que el digrafo G es, realmente, un digrafo múltiple o multidigrafo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). Sin embargo, en el contexto de este estudio, la multiplicidad de arcos no aporta mayor información que la que aporta un único arco, ya que, la única diferencia es que esta indica el número de cursos en los que este arco en cuestión tiene cabida, información que, por otro lado, se deduce fácilmente a partir del atributo de nodos correspondiente al curso académico (véase apartado 9.4. Categorización de los nodos del digrafo generador del grafo de estudio: atributos).

Es por ello por lo que para dotar de un carácter homogéneo y real a todos los arcos del digrafo G, es necesario proceder a la eliminación de los arcos múltiples (manteniendo un único arco en tales casos).

Para tal proceso de eliminación existen diferentes alternativas, algunas de las cuales están relacionadas con el uso de los paquetes de software elegidos. Así, Pajek, por ejemplo, en su propio proceso de importación de los datos del grafo, emite un informe de importación en el que especifica, además de otro tipo de información, el número de arcos múltiples detectados del total de arcos importados. En el caso del digrafo G, parte del informe de importación que emite Pajek es el que se muestra en la Figura 34.

Figura 34. Parte del informe de importación del digrafo G emitido por Pajek

```
-----------------------------------------------------------
Number of vertices (n): 814
-----------------------------------------------------------
                                       Arcs           Edges
-----------------------------------------------------------
Total number of lines                  3925               0
-----------------------------------------------------------
Number of multiple lines               1705               0
-----------------------------------------------------------
```

Obsérvese como, del conjunto de 3.925 arcos importados en Pajek, 1.705 son realmente arcos múltiples, por lo que se han establecido exactamente 2.220 arcos diferentes entre contenidos matemáticos.

Además de la información respecto a la existencia y la cantidad exacta de arcos múltiples en el digrafo G, Pajek permite la eliminación de los mismos de una forma rápida y sencilla, de forma que, tras tal eliminación, únicamente se considera un representante de cada uno de ellos. Así, tras la realización de tal proceso, Pajek crea un nuevo digrafo $G_1 = (C, A_1)$ y emite al respecto la información que se muestra en la Figura 35.

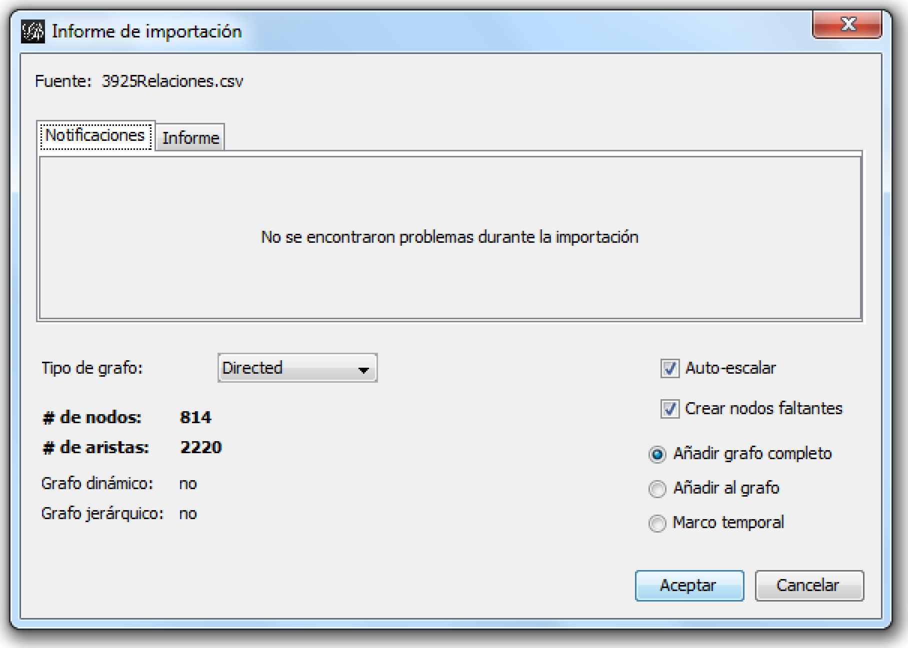
Figura 35. Parte del informe emitido por Pajek tras la eliminación de arcos múltiples del digrafo G

```
-----------------------------------------------------------
Number of vertices (n): 814
-----------------------------------------------------------
                                       Arcs           Edges
-----------------------------------------------------------
Total number of lines                  2220               0
-----------------------------------------------------------
Number of multiple lines                  0               0
-----------------------------------------------------------
```

Obsérvese que, respecto al nuevo digrafo $G_1 = (C, A_1)$ creado por Pajek, el número de nodos lógicamente sigue siendo el mismo, 814, mientras que el número de arcos ha disminuido a 2.220, al eliminarse los 1.705 arcos múltiples existentes entre los 3.925 totales.

Una segunda alternativa para la eliminación de arcos múltiples del digrafo G, es hacer uso del programa Gephi. Este software posee una función integrada de detección y eliminación de arcos duplicados en el mismo proceso de importación de datos, no siendo necesario, en este caso, llevar a cabo un proceso exclusivo de eliminación de los mismos. Así, para el caso de este digrafo, Gephi, en su proceso de importación, emite el informe que se muestra en la Figura 36.

Figura 36. Informe de importación emitido por Gephi



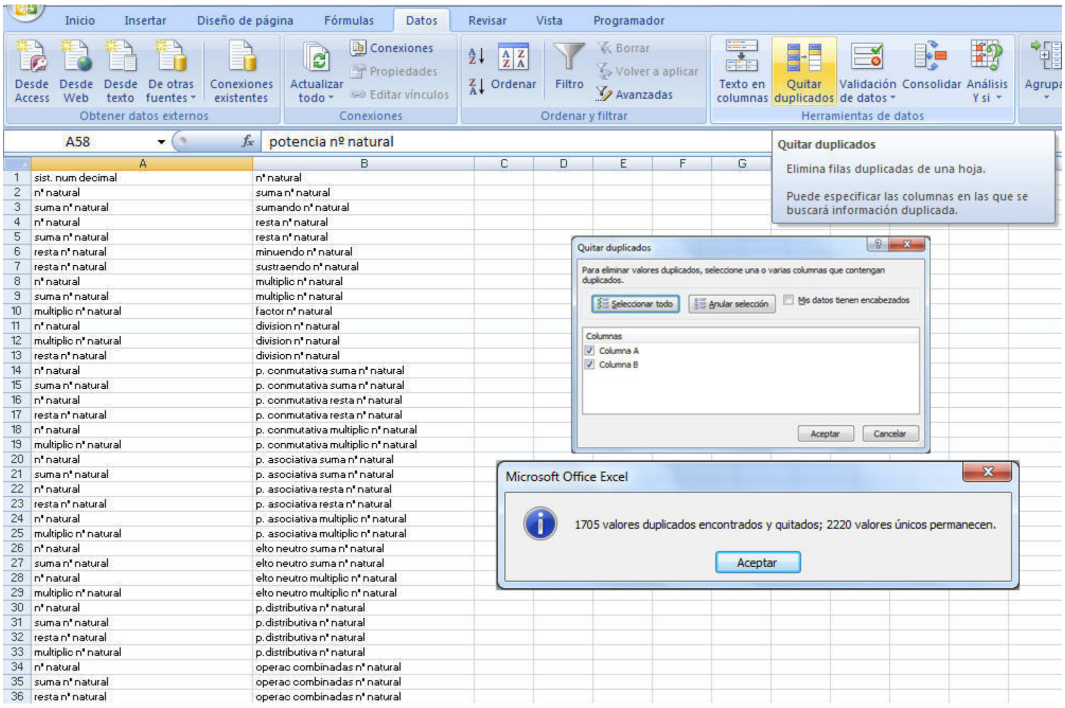
Obsérvese como, directamente, el número de nodos importados es de 814 y el número de arcos de 2.220, ambos datos lógicamente coincidentes con los aportados anteriormente por Pajek.

Una tercera opción para la eliminación de arcos múltiples, muy sencilla de realizar, e independiente en su totalidad del software de análisis seleccionado, es llevar a cabo la eliminación en el mismo archivo en el que se ha realizado el almacenamiento de los arcos del digrafo G (véase apartado 9.3. Almacenamiento de nodos y arcos del digrafo generador del grafo de estudio), esto es, en un archivo de Microsoft Excel.

Así, a partir de tal fichero, es la propia aplicación Microsoft Excel la que posee una opción general de eliminación de datos duplicados. Cabe destacar al respecto que, si bien es cierto que hay que tener en cuenta que esta función elimina filas duplicadas de una hoja de trabajo, y no celdas concretas de la misma, esta característica se adapta perfectamente a la disposición de los datos del archivo de arcos del digrafo G.

Con ello, tras la ejecución de la opción de eliminación de datos duplicados sobre el archivo de 3.925 arcos, la aplicación advierte que se han encontrado 1.705 valores duplicados, permaneciendo un total de 2.220 tal y como puede observarse en la Figura 37.

Figura 37. Proceso de eliminación de arcos múltiples en Microsoft Excel



Como era esperable, los datos son coincidentes con el resto de opciones, y cualquiera de las alternativas descritas anteriormente para la eliminación de arcos múltiples del digrafo G es perfectamente válida.

Así, a partir del digrafo múltiple o multidigrafo de inicio G, generador del grafo de estudio, y tras cualquiera de las tres opciones, se consigue un digrafo $G_1 = (C, A_1)$, también generador del grafo de estudio, y más adecuado al contexto de esta investigación.

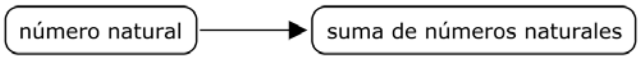
9.7. Preproceso del digrafo generador del grafo de estudio (II): clausura transitiva

Durante el proceso de determinación de los arcos del digrafo G, es preciso tomar, entre otras, decisiones relativas a si un determinado contenido debe considerarse como prerrequisito inmediato o simplemente como prerrequisito de otro (véase apartado 9.1. Diseño de un digrafo generador del grafo de estudio). Este tipo de decisiones son, en ocasiones, difíciles de tomar.

Así, por ejemplo, si se piensa en el contenido *Suma de números naturales*, un contenido prerrequisito inmediato suyo podría ser *Número natural*. En la Figura 38 se muestra una representación gráfica correspondiente a este arco.

Figura 38. Arco de la relación de requerimiento inmediato:

Número natural-Suma de números naturales

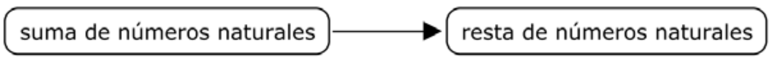


Fuente: elaboración propia

Por otro lado, si se analiza el contenido *Resta de números naturales* se puede pensar en *Suma de números naturales* como un prerrequisito inmediato suyo. La Figura 39 muestra el arco de esta relación.

Figura 39. Arco de la relación de requerimiento inmediato:

Suma de números naturales-Resta de números naturales

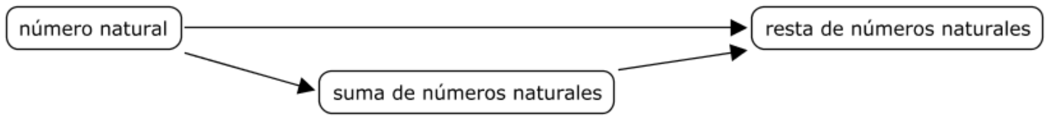


Fuente: elaboración propia

Sin embargo, la indecisión podría encontrarse en si considerar o no un arco entre *Número natural* y *Resta de números naturales*, ya que, realmente ya existe un camino de arcos de la relación de requerimiento inmediato con nodo origen *Número natural* y nodo destino *Resta de números naturales*. Así, en el caso de considerarlo, y teniendo en cuenta los arcos ya establecidos, se conseguiría el digrafo de la Figura 40. Con ello se tendría que el arco con nodo origen *Número natural* y nodo destino *Resta de números naturales* sería, por un lado, arco de la relación de requerimiento inmediato y, por otro lado, arco de la relación de requerimiento no inmediato a través del concepto *Suma de números naturales*.

Figura 40. Arcos de la relación de requerimiento inmediato-1:

Número natural-Suma de números naturales-Resta de números naturales

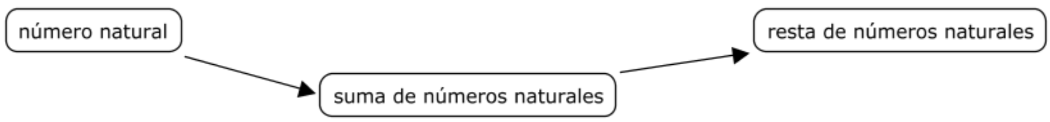


Fuente: elaboración propia

Sin embargo, en caso de no considerarlo, se tendría el grafo de la Figura 41, con lo que entre *Número natural* y *Resta de números naturales* existiría únicamente un camino de arcos de la relación de requerimiento inmediato.

Figura 41. Arcos de la relación de requerimiento inmediato-2:

Número natural-Suma de números naturales-Resta de números naturales



Fuente: elaboración propia

Este tipo de decisiones deben ser tomadas a lo largo de todo el proceso, pero decidir una forma de actuar en este sentido, es sumamente complicado, ya que, además, a medida que el número de arcos establecidos aumenta, considerar todas las posibilidades existentes es una tarea prácticamente inviable.

Sin embargo, la teoría de grafos aporta solución a esta problemática, de forma que, para conseguir una solución óptima y, en consecuencia, elaborar un grafo coherente y representativo de la realidad en el contexto del estudio, existen, al menos, dos alternativas: considerar bien la clausura transitiva del digrafo (véase apartado 6.4. Clausura transitiva de un grafo) o bien la reducción transitiva del mismo (véase apartado 6.5. Reducción transitiva de un grafo).

Así, para el caso del ejemplo anterior, e independientemente de la decisión tomada respecto a considerar o no un arco de la relación de requerimiento inmediato con nodo origen *Número natural* y nodo destino *Resta de números naturales* se tiene que la clausura transitiva del digrafo resultante es la que se muestra en la Figura 40 mientras que su reducción transitiva corresponde al digrafo de la Figura 41.

Lógicamente frente a un ejemplo simple como el descrito anteriormente, resulta sencillo determinar exactamente los arcos de la relación que se precisan o bien crear (clausura transitiva) o bien eliminar (reducción transitiva). Sin embargo, esta cuestión se complica cuando los contenidos a tratar no son tan triviales, y, sobre todo, cuando aumenta la cantidad de arcos que entran en juego.

Así, ni el análisis más preciso ni en mayor profundidad que pueda imaginarse de cada uno de los contenidos a tratar, resolvería esta cuestión. Para llevar a cabo el proceso correctamente sería necesario tener en mente y controlar absolutamente todos los contenidos, así como todos los arcos tanto de la relación de requerimiento como de la relación de requerimiento inmediato. Este hecho se escapa, sin duda, del alcance de la mente humana para una cantidad elevada de contenidos y arcos.

Por ello, la solución óptima a este problema se encuentra en determinar todos los arcos de relación que se precisen entre los contenidos, sin tener en cuenta ni el tipo de relación exacto ni los arcos previamente constituidos. De esta manera se consigue un digrafo, a partir del que se crea otro correspondiente bien a su clausura transitiva o bien a su reducción transitiva.

Ambas opciones, tanto la clausura transitiva de un digrafo, como su reducción transitiva, son perfectamente factibles de realizar por el ser humano si el digrafo es de pequeño tamaño. Sin embargo, para digrafos de un tamaño mayor, y, por supuesto, de orden y tamaño elevados como es el digrafo de estudio es preciso acudir a opciones computacionales. Recuérdese además que existen diversos algoritmos para el cálculo tanto de la clausura transitiva como de la reducción transitiva de un grafo (véase apartados 6.4. Clausura transitiva de un grafo y 6.5. Reducción transitiva de un grafo).

Así, con el fin de tener en cuenta todos los arcos existentes entre los diferentes contenidos seleccionados y conseguir el digrafo transitivo más pequeño que contiene al digrafo $G_1 = (C, A_1)$, se ha optado por considerar la clausura transitiva del mismo[51] $G_1^c = (C, A_1^c)$.

Para ello, se ha empleado el software Pajek (Gephi no dispone de esta opción), realizando el cálculo de la misma mediante el procedimiento, ya descrito con anterioridad, que este ofrece (véase apartado 8.1. Software Pajek).

Tras la realización del primer paso de tal procedimiento (el cálculo de la matriz de caminos asociada al digrafo), Pajek ofrece la información que se muestra en la Figura 42, de forma que de entre la cantidad de pares de nodos que se pueden formar a partir de los 814 nodos que forman el digrafo G_1, encuentra 12.375 para los que existe un único camino dirigido en el digrafo que une sus nodos y 5.407 para los que existe más de un camino dirigido que une sus nodos. Los datos anteriores forman así un total de 17.782 pares de nodos para los que existe al menos un camino dirigido que une sus nodos.

Figura 42. Parte del informe emitido por Pajek tras el cálculo de la matriz de caminos del digrafo G_1

```
-----------------------------------------------------------
Number of vertices (n): 814
-----------------------------------------------------------
                                       Arcs           Edges
-----------------------------------------------------------
Number of lines with value=1          12375               0
Number of lines with value#1           5407               0
-----------------------------------------------------------
Total number of lines                 17782               0
-----------------------------------------------------------
```

Pajek, además del dato anterior, sobre la matriz de caminos asociada al digrafo, asigna, a cada arco del digrafo, el número de caminos dirigidos existentes entre el nodo origen y el nodo destino del mismo. Parte de esta información puede verse en la Figura 43.

[51] La notación formal sería $G_1^c = (C, (A_1)^c)$, pero debido a que el proceso de eliminación de arcos duplicados y el de cálculo de la clausura transitiva conmutan, se decide emplear, por comodidad, la notación $G_1^c = (C, A_1^c)$.

Figura 43. Información emitida por Pajek sobre los arcos del digrafo

```
*Arcs
   1     2 1
   1     3 1
   ...

   1    28 1
   1    29 2
   1    30 1
   1    31 1
   1    32 2
   1    33 1
   1    34 4
   1    35 1
   1    36 2
   1    37 3
   1    38 1
   1    39 3
   1    40 1
   ...

   1    50 8
   1    51 8
   1    52 1
   1    53 8
   1    54 8
   1    55 4
   1    56 1
   1    57 1

   ...

 500  814 1
 501  811 1
 501  812 1
 502  813 1
 503  814 1
```

La información mostrada en la Figura 43 se lee de forma que la tercera columna indica el número de caminos dirigidos existentes en el digrafo con origen en el nodo de la primera columna y destino en el nodo de la segunda columna.

Así, por ejemplo, obsérvese que existe un solo camino dirigido con nodo origen el nodo con identificador numérico 1 y con nodo destino el nodo con identificador numérico 2. De la misma manera que existen ocho caminos dirigidos diferentes con nodo origen el nodo de identificador numérico 1 y nodo destino, el nodo de identificador numérico 50.

Obsérvese por otro lado que, para el último nodo origen de un arco del digrafo que se muestra información es para el nodo de identificador numérico 503. Esto quiere decir que no existen caminos dirigidos en el digrafo con nodo origen de identificador numérico entre 504 y 814.

La interpretación de este hecho es que los nodos de identificador numérico entre 504 y 814, no son contenidos prerrequisito de ninguno de los contenidos del digrafo. Dicho de otro modo, 311 contenidos de los 814, esto es un 38.2%, o bien serán contenidos finales para un alumno que finalice su vida académica con la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, o bien se entiende que serán contenidos prerrequisito para la etapa educativa posterior.

Tras el cálculo de la matriz de caminos asociada al digrafo G_1, se realiza con Pajek el segundo paso del procedimiento de cálculo de su clausura transitiva, esto es, la reducción de dicha matriz a una matriz booleana. El digrafo $G_1^c = (C, A_1^c)$ así resultante, correspondiente a la clausura transitiva del digrafo G_1, está formado por 814 nodos y 17.782 arcos, tal y como indica el informe emitido por Pajek que se muestra en la Figura 44.

Figura 44. Parte del informe emitido por Pajek tras el cálculo de la clausura transitiva del digrafo G_1

```
-------------------------------------------------------------
Number of vertices (n): 814
------------------------------------------------------------
                                       Arcs          Edges
------------------------------------------------------------
Total number of lines                 17782              0
------------------------------------------------------------
```

9.8. Preproceso del digrafo generador del grafo de estudio (III): detección y eliminación de circuitos

Una vez obtenido, a partir del digrafo G inicialmente almacenado, el digrafo G_1, tras haber eliminado los arcos múltiples de G, y después de haber calculado la clausura transitiva de G_1, $G_1^c = (C, A_1^c)$, es necesario dar un paso más para obtener el digrafo de estudio que modelice realmente una realidad acorde al contexto de esta investigación.

Debido al tipo de relación establecida entre contenidos matemáticos (véase apartado 9.1. Diseño de un digrafo generador del grafo de estudio), es claro que un contenido no puede estar relacionado consigo mismo, ya que esto significaría que un contenido es prerrequisito de sí mismo. En lenguaje de teoría de grafos, este hecho se traduciría en la existencia de bucles en el digrafo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos).

Si se considera entonces el digrafo G_1 y se analiza la existencia de bucles en el mismo mediante el software Pajek, se obtiene que no posee ninguno tal y como se muestra en la Figura 45.

Figura 45. Informe emitido por Pajek respecto al número de bucles en el digrafo G_1

Number of vertices (n): 814

	Arcs	Edges
Total number of lines	2220	0
Number of loops	0	0

Así, una vez calculada la clausura transitiva del digrafo G_1, se tiene entonces que el digrafo transitivo resultante G_1^c tampoco poseerá bucles a no ser que en el digrafo G_1 existan ciclos dirigidos o circuitos dirigidos (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). El carácter de camino dirigido cerrado de ambos conceptos, independientemente de la repetición de nodos o arcos en el mismo, es lo que conduciría a la creación de bucles tras el cálculo de la clausura transitiva.

Por otro lado, es claro que, en el contexto del estudio, la existencia de ciclos o circuitos dirigidos en el digrafo G_1 no tendría sentido, ya que esto supondría, de nuevo por el carácter de camino cerrado de ambos, que un contenido sería, de cierta manera, prerrequisito no inmediato de sí mismo.

Sin embargo, después de analizar la existencia de bucles en el digrafo G_1^c mediante el software Pajek se tiene que este identifica 6 bucles tal y como se muestra en la Figura 46.

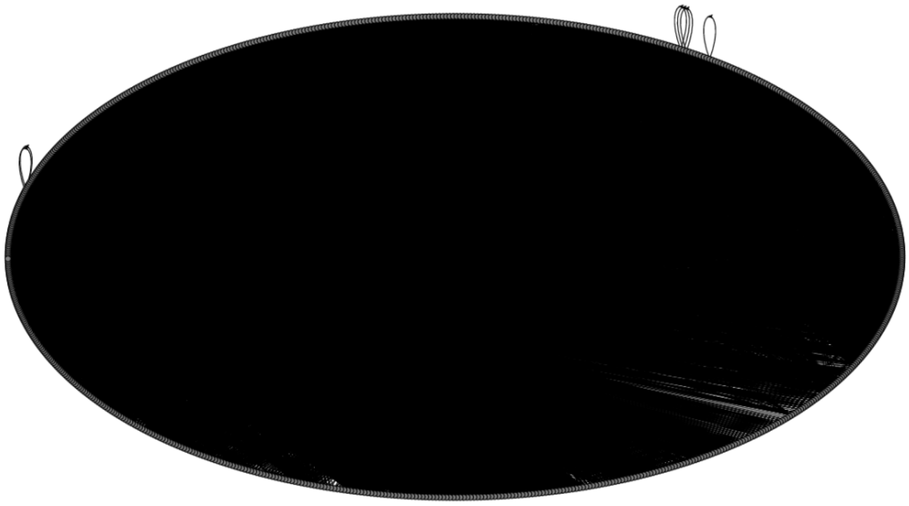
Figura 46. Informe emitido por Pajek respecto al número de bucles en el digrafo G_1^c

Number of vertices (n): 814

	Arcs	Edges
Total number of lines	17782	0
Number of loops	6	0

Este hecho puede apreciarse en la Figura 47 donde se muestra una representación gráfica del digrafo G_1^c realizada mediante el algoritmo de disposición *Circular* que posee Pajek (véase apartado 8.1. Software Pajek).

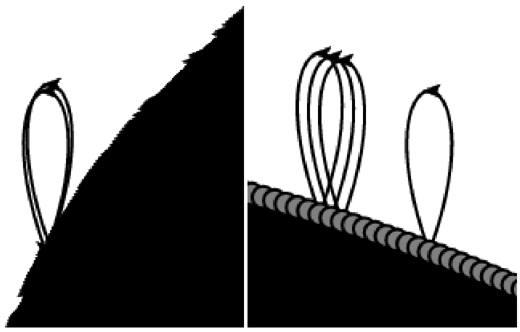
Figura 47. Representación gráfica del digrafo G_1^c



Fuente: elaboración propia mediante el software Pajek

En la Figura 47, además de la elipse prácticamente cubierta que se forma debido a la gran cantidad de nodos y arcos que definen el digrafo G_1^c, se aprecian unos salientes en su lado izquierdo y superior derecho. Estos salientes, que pueden observarse con mayor claridad en la Figura 48, se corresponden exactamente con los 6 bucles detectados por Pajek en este digrafo.

Figura 48. Bucles en el digrafo G_1^c



Fuente: elaboración propia mediante el software Pajek

Así, tras esta información tanto de tipo numérico como de tipo gráfico, es necesario investigar la razón de la existencia de tales bucles en el digrafo G_1^c.

Para ello, en primer lugar, se identifican haciendo uso del software Pajek los nodos que son a la vez nodo origen y nodo destino de los arcos dirigidos que dan lugar a tales bucles. Pajek ofrece así información sobre los identificadores numéricos de los nodos involucrados, el número de bucles detectados en cada nodo y las etiquetas correspondientes a los nodos en cuestión.

Como se muestra en la Figura 49 se identifican así 6 nodos con un bucle cada uno. Concretamente, tales nodos corresponden a los contenidos: *Factor de un número entero*, *Multiplicación de números enteros*, *Representación gráfica de una función*, *Función convexa*, *Función cóncava* y *Puntos de inflexión de una función*.

Figura 49. Información de los nodos correspondientes a los bucles identificados en el digrafo G_1^c

```
 37.    1.000000 - factor nº entero
 38.    1.000000 - multiplic nº entero
273.    1.000000 - representac funcion
274.    1.000000 - funcion convexa
275.    1.000000 - funcion concava
283.    1.000000 - ptos inflexion funcion
```

Para encontrar el motivo de la existencia de los bucles así identificados en el digrafo G_1^c se procede entonces al análisis de ciertos subgrafos dirigidos del mismo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos) con nodos en ese conjunto de contenidos.

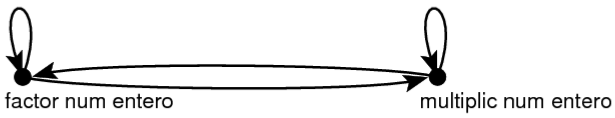
Así, si se presta únicamente atención a los contenidos con identificadores numéricos 37 y 38 correspondientes a *Factor de un número entero* y *Multiplicación de números enteros* respectivamente, y se determina el subgrafo dirigido del digrafo G_1^c cuyo conjunto de nodos es el formado por los dos nodos correspondientes a estos contenidos, se tiene que el conjunto de arcos de dicho subgrafo dirigido está formado por 4 arcos, dos de los cuales son bucles. En la Figura 50 se muestra parte del informe emitido por Pajek tras la determinación de tal subgrafo dirigido.

Figura 50. Parte del informe emitido por Pajek sobre el subgrafo dirigido de G_1^c con conjunto de nodos: *Factor de un número entero* y *Multiplicación de números enteros*

3. Removing vertices [1-36,39-814] from N2 (2)		
Number of vertices (n): 2		
	Arcs	Edges
Total number of lines	4	0
Number of loops	2	0

Una representación gráfica de tal subgrafo dirigido de orden 2 y tamaño 4 puede verse en la Figura 51.

Figura 51. Representación gráfica del subgrafo dirigido de G_1^c con conjunto de contenidos:
Factor de un número entero* y *Multiplicación de números enteros



Fuente: elaboración propia mediante el software Pajek

Cabe entonces analizar qué es lo que realmente ocurre entre los contenidos *Factor de un número entero* y *Multiplicación de números enteros*. Para ello se atiende a los arcos del digrafo G_1 de extremos los nodos correspondientes a estos dos contenidos.

Así, en la Figura 51 se observa, por un lado, un arco de nodo origen *Factor de un número entero* y nodo destino *Multiplicación de números enteros* y por otro lado, un arco de nodo origen *Multiplicación de números enteros* y nodo destino *Factor de un número entero*. Con esta información, y tras comprobar que ambos arcos ya formaban parte del conjunto de arcos del digrafo G_1, se deduce que la existencia de estos dos arcos es la causa de la aparición de los dos bucles en el digrafo G_1^c.

Sin embargo, teniendo en cuenta de nuevo el tipo de relación definida para este estudio, el digrafo G_1 debería ser antisimétrico (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), por lo que la existencia de los dos arcos mencionados no debería ser posible, ya que, tal y como afirma Rodríguez (1983), un contenido no puede ser al mismo tiempo prerrequisito y consecuencia de otro. En este caso particular se tendría que el contenido *Factor de un número entero* es prerrequisito del contenido *Multiplicación de números enteros* y viceversa.

Para encontrar la solución a tal cuestión es preciso entonces analizar esta situación con mayor detalle. Por ello, se identifican mediante el software Pajek los contenidos prerrequisitos de ambos contenidos sobre el digrafo G_1^c.

Así, se tiene que los contenidos prerrequisitos de *Factor de un número entero* corresponden a: S*istema de numeración decimal*, *Números naturales*, *Suma de números naturales*, *Multiplicación de* *números naturales*, *Recta*, *Representación sobre la recta numérica de números naturales*, *Números enteros*, *Representación sobre la recta numérica de números enteros*, *Valor absoluto de un número entero* y *Multiplicación de números enteros*. La Figura 52 muestra la información de los identificadores numéricos y las etiquetas de los nodos correspondientes a estos contenidos obtenida por el software Pajek.

Figura 52. Información de los prerrequisitos de *Factor de un número entero* en el digrafo G_1^c

```
 1.      1 - sist. num decimal
 2.      1 - nº natural
 3.      1 - suma nº natural
 5.      1 - multiplic nº natural
16.      1 - recta
17.      1 - representac nº natural
31.      1 - nº entero
32.      1 - representac nº entero
33.      1 - valor absoluto nº entero
38.      1 - multiplic nº entero
```

Por otro lado, se tiene que los contenidos prerrequisitos de *Multiplicación de números enteros* son: *Sistema de numeración decimal*, *Números naturales*, *Suma de números naturales*, *Multiplicación de números naturales*, *Recta*, *Representación sobre la recta numérica de números naturales*, *Números enteros*, *Representación sobre la recta numérica de números enteros*, *Valor absoluto de un número entero* y *Factor de un número entero*. La Figura 53 muestra la información al respecto obtenida por Pajek.

Figura 53. Información de los prerrequisitos de *Multiplicación de números enteros* en el digrafo G_1^c

```
 1.      1 - sist. num decimal
 2.      1 - nº natural
 3.      1 - suma nº natural
 5.      1 - multiplic nº natural
16.      1 - recta
17.      1 - representac nº natural
31.      1 - nº entero
32.      1 - representac nº entero
33.      1 - valor absoluto nº entero
37.      1 - factor nº entero
```

Obsérvese que, al tratarse el digrafo G_1^c de un digrafo transitivo, entre dos nodos cualesquiera entre los que haya un camino dirigido, siempre hay un camino dirigido de longitud uno (de ahí el número 1 que aparece en la Figura 52 y Figura 53).

Contrastando entonces la información de la Figura 52 y la Figura 53, se confirma el origen del error, detectando, efectivamente, cada uno de los dos contenidos como prerrequisito del otro, ya que puede verse como el contenido *Multiplicación de números enteros* es prerrequisito de *Factor de un número entero* y *Factor de un número entero* es prerrequisito de *Multiplicación de números enteros*.

Este hecho se trata sin duda de un error cometido durante el proceso de establecimiento de los contenidos matemáticos que están relacionados entre sí en la relación de requerimiento. Para resolver esta cuestión, se procede entonces a analizar en profundidad la parte correspondiente de este proceso.

Si se atiende a lo explicitado en algunos de los libros de texto consultados (véase Tabla 21), Vizmanos, Anzola, Peralta y Bargueño (2004) afirman respecto a la multiplicación de números enteros que:

Para multiplicar dos números enteros:

1º Se multiplican sus valores absolutos.

2º El resultado es un número:

- *Positivo, si los dos son positivos o los dos negativos.*
- *Negativo, si uno es positivo y el otro negativo.* (p.62)

Siendo en la definición de la propiedad conmutativa de la multiplicación de números enteros donde mencionan el concepto de factor.

Propiedad conmutativa: El orden de los factores no altera el producto. (p.62)

Por otro lado, Uriondo (2007) en relación al mismo aspecto, emplea el concepto de factor en la definición del proceso de multiplicación:

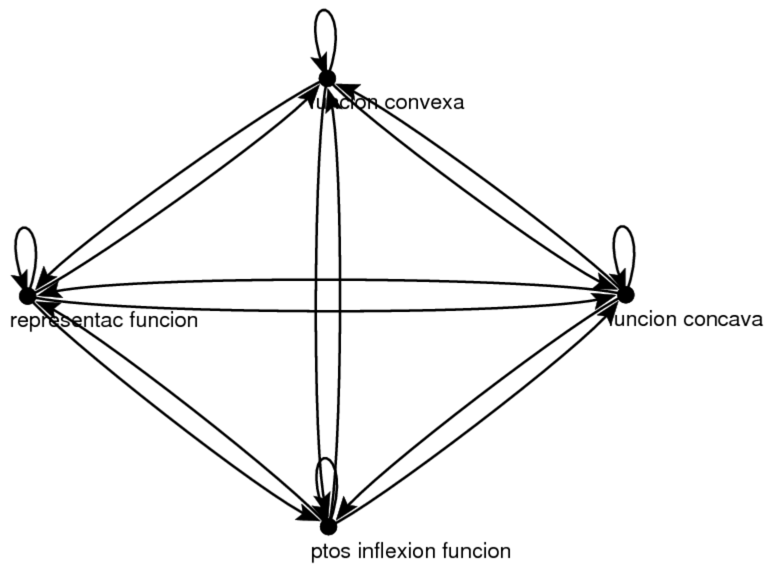
Para multiplicar dos números enteros, se multiplican sus valores absolutos. El producto es positivo si los dos factores son del mismo signo, y negativo si los dos factores son de distinto signo. (p.52)

Parece entonces que se trata de una decisión nada sencilla. Por ello, se tiene en cuenta además que, según las fuentes empleadas, el contenido de *Factor de un número entero* es propio del primer curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, mientras que la *Multiplicación de números enteros* es propia tanto del primer curso como del segundo curso de la misma etapa educativa. Así, atendiendo a todo lo anterior, se decide como mejor opción eliminar el par ordenado que establece al contenido de *Multiplicación de números enteros* como prerrequisito de *Factor de un número entero*[52].

Una vez resuelta esta cuestión, se continúa con la exploración del detonante de la existencia del resto de bucles en el digrafo G_1^c. Además de los contenidos analizados, parece ser que los contenidos: *Representación gráfica de una función*, *Función convexa*, *Función cóncava* y *Puntos de inflexión de una función*, correspondientes en el digrafo a los nodos de identificadores numéricos 273, 274, 275 y 283 respectivamente, están involucrados en la existencia de esos bucles (véase Figura 49).

Siguiendo así el mismo procedimiento que el llevado a cabo con los otros dos contenidos, si se determina el subgrafo dirigido del digrafo G_1^c formado por los contenidos *Representación gráfica de una función*, *Función convexa*, *Función cóncava* y *Puntos de inflexión de una función*, se obtiene una representación gráfica como la que se muestra en la Figura 54.

Figura 54. Representación gráfica del subgrafo dirigido de G_1^c cuyo conjunto de contenidos es: *Representación gráfica de una función*, *Función convexa*, *Función cóncava* y *Puntos de inflexión de una función*



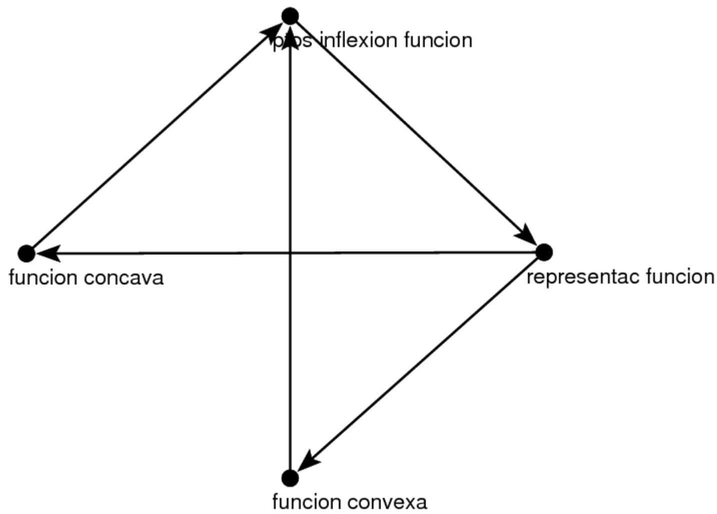
Fuente: elaboración propia mediante el software Pajek

[52] Observemos que lo que se ha hecho es considerar como *Factor de número entero* el concepto que se refiere a "factores de un producto de enteros". Cabría también como solución, haber incluido, por separado, los contenidos "factorización de un número entero" y "factores de un producto de enteros".

En la representación gráfica del subgrafo dirigido de G_1^c así determinado se observa como entre cada par de nodos del mismo existen dos arcos que hacen que tal subgrafo dirigido no sea antisimétrico. Entonces, con esta información, y tras comprobar que todos esos arcos ya formaban parte del conjunto de arcos del digrafo G_1, se deduce que, precisamente la existencia de esos arcos que hacen que el subgrafo dirigido no sea antisimétrico, es la causa de la aparición del resto de bucles en el digrafo G_1^c.

Por tanto, es preciso encontrar el motivo de la existencia de tales arcos en el digrafo G_1. Se procede entonces al análisis del subgrafo dirigido de G_1 formado por esos cuatro nodos. Con ello se obtiene la representación gráfica del mismo que se muestra en la Figura 55.

Figura 55. Representación gráfica del subgrafo dirigido de G_1 cuyo conjunto de contenidos es: *Representación gráfica de una función*, *Función convexa*, *Función cóncava* y *Puntos de inflexión de una función*



Fuente: elaboración propia mediante el software Pajek

Puede observarse claramente en la Figura 55 la existencia de dos ciclos dirigidos, uno entre los contenidos: *Representación gráfica de una función*, *Función convexa* y *Puntos de inflexión de una función* y otro entre: *Representación gráfica de una función*, *Función cóncava* y *Puntos de inflexión de una función*.

Mediante la exploración de estos dos ciclos dirigidos, parece claro que el punto clave se encuentra en el nodo correspondiente al contenido *Representación gráfica de una función*.

Cabe destacar al respecto, como es bien sabido, que los contenidos relativos al estudio de gráficas de funciones propios de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, consisten, entre otros aspectos, en deducir ciertas características de las funciones tales como su dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos, concavidad, convexidad, puntos de inflexión, etc.

Así, en relación a lo anterior pueden extraerse, al menos, dos conclusiones interesantes. La primera de ellas es que para poder comprender con exactitud algunos de esos conceptos, es preciso tratarlos sobre representaciones gráficas de funciones. Este es el caso, por ejemplo, de algunas de las definiciones de *Función cóncava* y *Función convexa* encontradas en los libros de texto consultados (véase Tabla 21).

Por ejemplo, Carrasco, Martín y Ocaña (2008) definen estos dos conceptos de la siguiente manera:

> *Una función es cóncava en un intervalo si, al tomar dos puntos cualesquiera de ese intervalo, el segmento que los une está situado por encima de la gráfica de la función.* (p.183)

> *Una función es convexa en un intervalo si, al tomar dos puntos cualesquiera de ese intervalo, el segmento que los une está situado por debajo de la gráfica de la función.* (p.183)

Motivo este por el que puede deducirse que la *Representación gráfica de una función*, es prerrequisito tanto de los conceptos de *Función cóncava* y *Función convexa*, como del concepto de *Puntos de inflexión de una función*.

Sin embargo, la segunda de ellas es que para llevar a cabo el proceso de representación gráfica de una función, es importante conocer, entre otros, los contenidos de *Función cóncava*, *Función convexa* y *Puntos de inflexión de una función*, por lo que estos tres últimos podrían considerarse como prerrequisitos de la *Representación gráfica de una función*.

Tras el estudio de las dos consecuencias anteriores, se ha decidido entonces establecer los contenidos de *Función cóncava*, *Función convexa* y *Puntos de inflexión de una función* como prerrequisitos de *Representación gráfica de una función*, considerando fundamentales estos junto con otros contenidos para lograr una plena comprensión de la representación gráfica de funciones[53].

Es por ello por lo que se procede a eliminar del digrafo G_1 los arcos que determinan la *Representación gráfica de una función* como prerrequisito de *Función cóncava* y *Función convexa*.

Así, la eliminación de estos arcos, junto con el arco de nodo origen *Multiplicación de números enteros* y nodo destino *Factor de un número entero* ya eliminado, suponen la eliminación de tres arcos del digrafo G_1 de orden 814 y tamaño 2.220.

De esta manera se obtiene un nuevo digrafo $G_2 = (C, A_2)$ donde A_2 es el conjunto de arcos A_1 salvo los tres arcos mencionados. Con ello, el orden de este digrafo sigue siendo 814 mientras que su tamaño es de 2.217.

Una vez definido el digrafo G_2, es preciso comprobar que no existen en el mismo ni ciclos dirigidos ni circuitos dirigidos. Como se ha realizado con anterioridad, ello puede realizarse de nuevo considerando su clausura transitiva $G_2^c = (C, A_2^c)$ y cotejando que realmente este no posee ningún bucle.

Tras el cálculo del digrafo G_2^c mediante el software Pajek este ofrece un informe donde puede comprobarse que efectivamente este digrafo no posee ningún bucle. Parte de este informe se muestra en la Figura 56.

Con todo lo anterior, se tiene que el nuevo digrafo G_2 de orden 814 y tamaño 2.217, posee las características adecuadas a la naturaleza de la información que el mismo representa.

[53] Es muy importante hacer notar como ha sido el estudio computacional del grafo el que ha revelado como, realmente, existen dos conceptos diferentes subyaciendo a "representación gráfica de una función". Uno sería la representación "mecánica", en la que se dibujan "muchos puntos" de la curva y se interpola, al objeto de obtener una representación aproximada de la función (que es lo habitual cuando se realiza un "plot" de una función usando un ordenador). Este concepto sería previo a los conceptos de concavidad y convexidad. El otro sería la representación de la función basándose en el estudio de máximos y mínimos locales, puntos de inflexión y asíntotas. Este último concepto sería, obviamente, posterior a los conceptos de concavidad y convexidad. La fragmentación de este concepto en dos sería pues otra posible solución a la anomalía de la existencia de este ciclo.

Figura 56. Informe emitido por Pajek respecto al número de bucles en el digrafo G_2^c

```
-----------------------------------------------------------
Number of vertices (n): 814
----------------------------------------------------------
                                        Arcs          Edges
----------------------------------------------------------
Total number of lines                  17669              0
----------------------------------------------------------
Number of loops                            0              0
----------------------------------------------------------
```

Además de ello es necesario, como ya se ha comentado (véase apartado 9.7. Preproceso del digrafo generador del grafo de estudio (II): clausura transitiva), tener en cuenta todos los pares ordenados en la relación establecida y evitar así la problemática relativa a la toma de decisiones en su proceso de almacenamiento sobre pares de la relación de requerimiento y pares de la relación de requerimiento inmediato.

Es por ello por lo que a partir del digrafo G_2 se considera como digrafo de estudio para la presente investigación, el correspondiente a la clausura transitiva del mismo, esto es el digrafo G_2^c.

Obsérvese que el digrafo de estudio así creado define con toda exactitud la relación de requerimiento establecida en el conjunto de contenidos matemáticos considerado.

Este digrafo, tal y como puede observarse en la Figura 56 es de orden 814 y tamaño 17.669. Se trata además, gracias a los diferentes procesos seguidos, de un digrafo simple, sin circuitos dirigidos y transitivo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), características que, por otra parte, le hacen ser el tipo de digrafo idóneo para la modelización de la relación establecida entre contenidos matemáticos en el contexto de este estudio.

CAPÍTULO 10

ANÁLISIS DEL GRAFO DE ESTUDIO

De acuerdo a los procesos seguidos de diseño y elaboración del grafo de estudio, este corresponde a un digrafo en el que su conjunto de nodos está compuesto por los contenidos matemáticos considerados en esta investigación para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, y su conjunto de arcos está formado por todos los pares ordenados de esos contenidos que definen la relación de requerimiento establecida en tal conjunto de contenidos.

Así, una vez elaborado, se procede a un análisis del mismo para poder extraer conclusiones sobre su estructura y, en consecuencia, sobre la estructuración del conocimiento matemático propio de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria.

El análisis que se lleva a cabo sobre este grafo es exploratorio, ya que no se parte de una serie de hipótesis establecidas que se pretendan confirmar, sino que es el propio análisis del mismo el que desvela una serie de características estructurales. Para conseguir, además, una exploración minuciosa del grafo de estudio, se decide realizar diferentes análisis de tipo visual y numérico, simultáneamente.

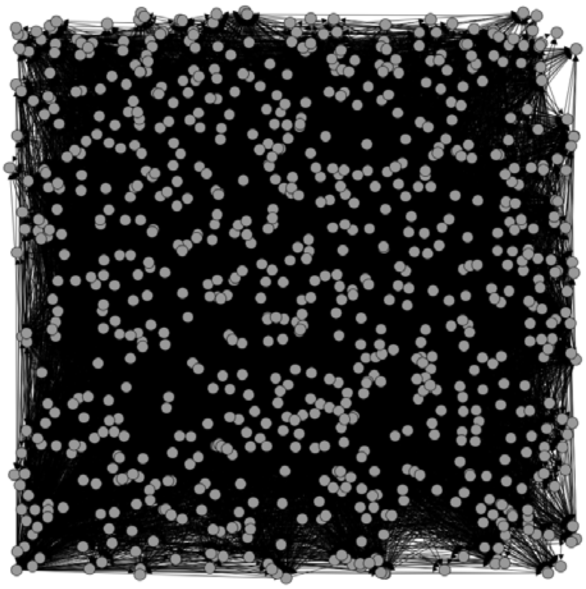
10.1. Primeros intentos de visualización del grafo de estudio

Como se ha comentado con anterioridad, la representación gráfica de un grafo es fundamental para el estudio de la información que este recoge. Así, como afirma Freeman (2000), su análisis visual es de gran riqueza en el descubrimiento de propiedades relativas a tal información.

Es por ello por lo que se comienza el análisis del grafo de estudio con unas primeras visualizaciones del mismo. Para ello se hace uso de los paquetes de software elegidos para esta investigación: Pajek y Gephi (véase apartados 8.1. Software Pajek y 8.2. Software Gephi). Con ello, dos de las representaciones gráficas posibles dentro de la gran variedad de opciones existentes se muestran en la Figura 57 y Figura 58.

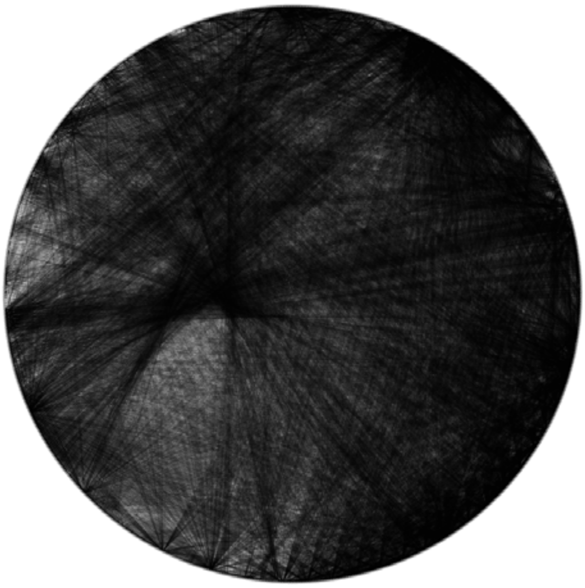
La Figura 57 muestra una representación gráfica del grafo de estudio realizada con el software Gephi haciendo uso del algoritmo de *Distribución Aleatoria* que este posee. Como puede observarse, esta representación, aunque permite hacerse una idea de la cantidad de información que el grafo modeliza (recuérdese que el grafo de estudio es de orden 814 y tamaño 17.669), no aporta una claridad visual suficiente que permita la extracción de alguna conclusión sobre la estructura de los datos que representa.

Figura 57. Representación gráfica del grafo de estudio. Distribución aleatoria



Por otro lado, la Figura 58 representa una distribución de los elementos del grafo de estudio de forma que sus nodos se disponen en una circunferencia. Esta distribución, realizada mediante el algoritmo de *Circular Layout* del software Gephi, de nuevo no aporta mucha más información que la apreciación visual de una gran cantidad de datos representada.

Figura 58. Representación gráfica del grafo de estudio. Distribución circular



Así, teniendo en cuenta el orden y tamaño elevados del grafo de estudio, si se quieren analizar gráficamente algunas de las características globales de su estructura, parece necesaria, al menos para tal propósito, una distribución más adecuada de sus nodos que la que muestran las representaciones gráficas de la Figura 57 y Figura 58.

Por ello, se utilizan en la presente investigación otros de los algoritmos de distribución que ofrecen los programas, y se hace uso de los parámetros editables que estos poseen. De esta forma se consiguen, entre otras, distribuciones de nodos y arcos que, atendiendo a una serie de reglas básicas, semánticas y estructurales de representación (Sugiyama, 2002) (véase apartado 6.2. Formas de representación de un grafo), hacen de la representación gráfica del grafo de estudio una forma verdaderamente útil de análisis.

10.2. Detección y análisis de clusters en el grafo de estudio

Debido a que el grafo de estudio no corresponde a un grafo aleatorio, sino que, por el contrario, modeliza una situación real, una característica que puede revelar información de interés sobre el mismo es su estructura de clusters (véase apartado 8.2. Software Gephi).

Es por ello por lo que resulta fundamental llevar a cabo un análisis de detección de clusters en el grafo de estudio, esto es, de detección de grupos de nodos más densamente conectados entre sí que con el resto de nodos del grafo.

Esta forma de estructuración de los nodos de un grafo, acorde a la densidad de sus arcos, puede aportar así, en el contexto de esta investigación, información relevante sobre formas de organización de los contenidos matemáticos propios de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria, atendiendo a la relación de requerimiento establecida entre ellos.

Se procede entonces a un análisis visual de detección de clusters, basado en disposiciones agrupadas de nodos pertenecientes a un mismo cluster. Para ello se ejecuta sobre el grafo de estudio un algoritmo de distribución implementado en Gephi, el algoritmo *Force Atlas* (Jacomy et al., 2011; Jacomy et al., 2014).

Es preciso recordar que este algoritmo realiza una reorganización continua de los nodos del grafo sobre el que se ejecuta, hasta que encuentra una posición de equilibrio de todos los elementos. Así, debido a su implementación en Gephi, y gracias al motor de renderizado que este software posee, puede visualizarse en tiempo real el proceso de reorganización de nodos que sigue este algoritmo sobre el grafo al que se aplica.

En este caso se ha ejecutado este algoritmo sobre el grafo de estudio considerando para los parámetros editables los siguientes valores: 0.1 de *Inercia*, 200 de *Fuerza de repulsión*, 10 de *Fuerza de atracción*, 10 de *Máximo desplazamiento*, 80 de *Fuerza de auto-estabilización*, 0.2 de *Sensibilidad de auto-estabilización*, 30 de *Gravedad* y 1 de *Velocidad*, considerando además *Auto-estabilización* y *Ajuste por tamaños* (véase Figura 59).

Figura 59. Parámetros para el algoritmo *Force Atlas* en Gephi

⊟ Force Atlas	
Inercia	0.1
Fuerza de repulsión	200.0
Fuerza de atracción	10.0
Máximo desplazamiento	10.0
Auto-estabilizar	☑
Fuerza de auto-estabilización	80.0
Sensibilidad de auto-estabilización	0.2
Gravedad	30.0
Distrubución de Atracción	☐
Ajustar por tamaños	☑
Velocidad	1.0

Se muestran en las Figuras 60, 61, 62, 63 y 64 las imágenes del proceso seguido sobre el grafo de estudio a los 5, 30, 60, 120 y 180 segundos tras el inicio de la ejecución del algoritmo.

Figura 60. Representación gráfica del grafo de estudio procesado mediante el algoritmo *Force Atlas* en Gephi, tras 5 segundos de ejecución del mismo

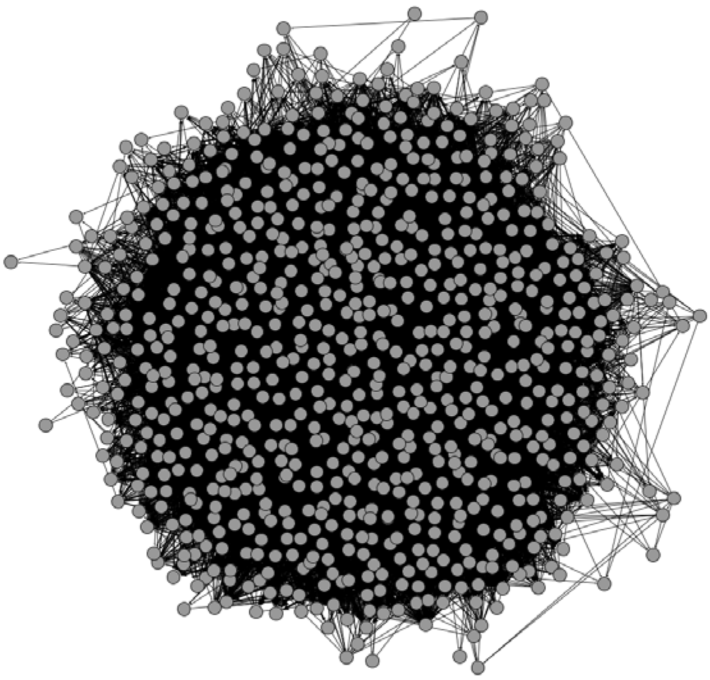


Figura 61. Representación gráfica del grafo de estudio procesado mediante el algoritmo *Force Atlas* en Gephi, tras 30 segundos de ejecución del mismo

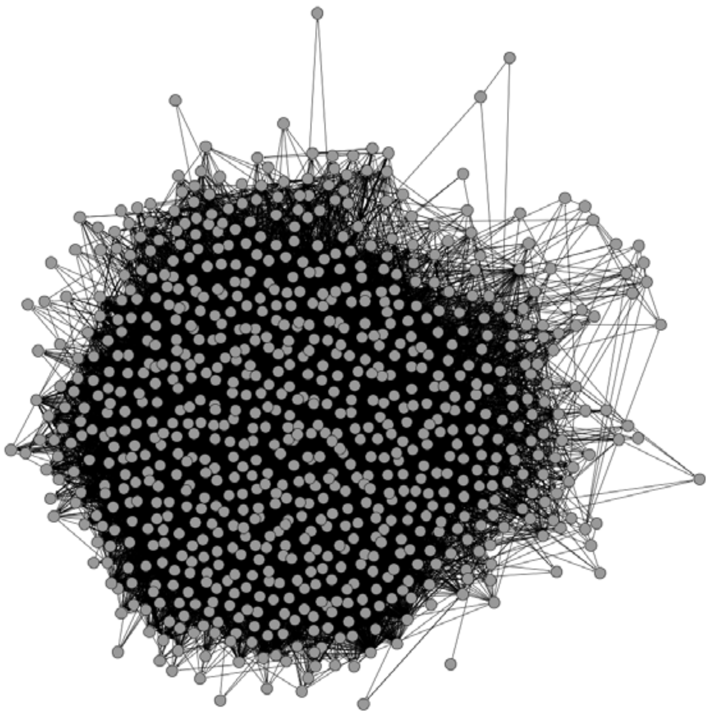


Figura 62. Representación gráfica del grafo de estudio procesado mediante el algoritmo *Force Atlas* en Gephi, tras 60 segundos de ejecución del mismo

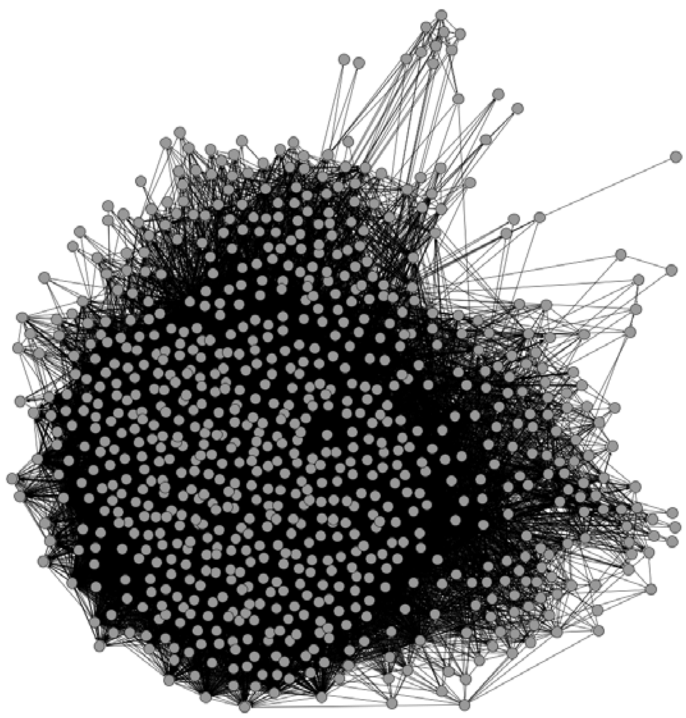


Figura 63. Representación gráfica del grafo de estudio procesado mediante el algoritmo *Force Atlas* en Gephi, tras 120 segundos de ejecución del mismo

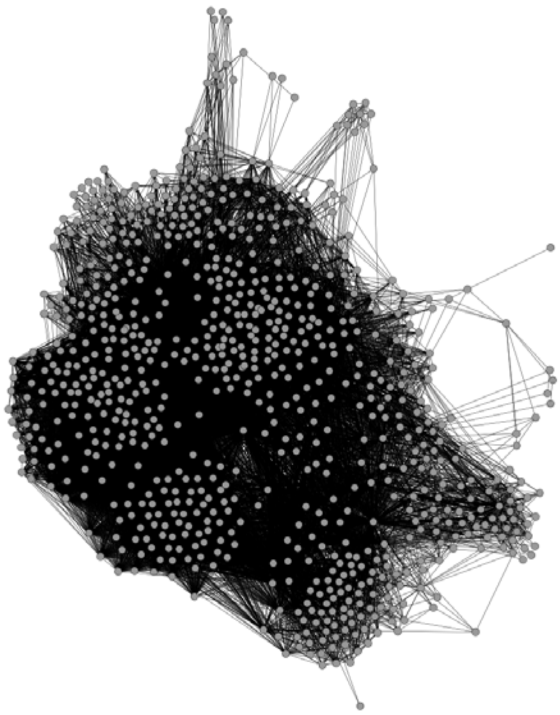
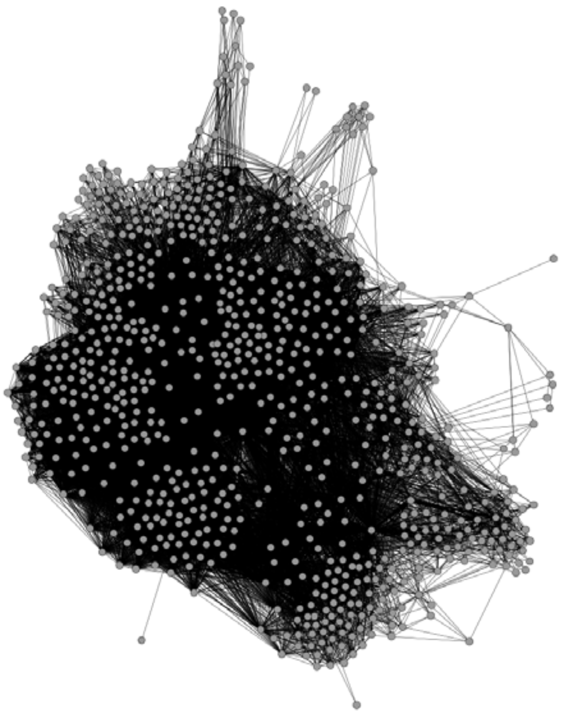
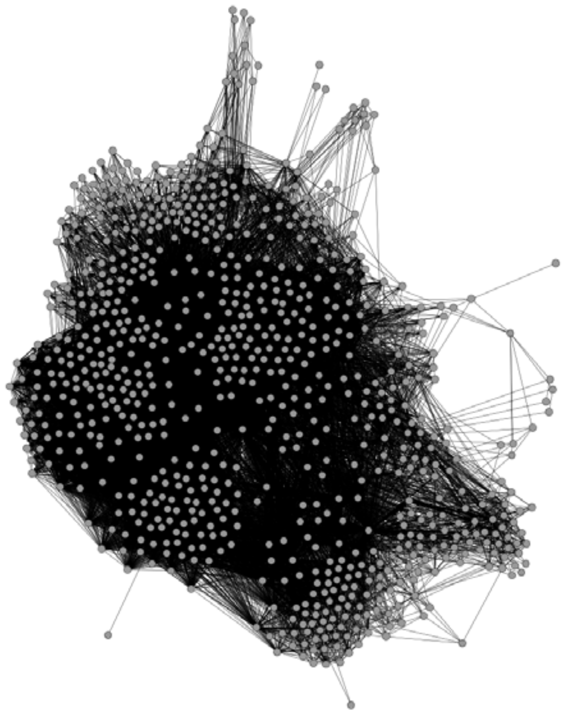


Figura 64. Representación gráfica del grafo de estudio procesado mediante el algoritmo *Force Atlas* en Gephi, tras 180 segundos de ejecución del mismo



Señalar que, a partir de este tiempo, prácticamente no se modifica la distribución de los nodos, tal y como puede comprobarse en la Figura 65, donde se muestra la representación gráfica del grafo de estudio tras 15 minutos de ejecución.

Figura 65. Representación gráfica del grafo de estudio procesado mediante el algoritmo *Force Atlas* en Gephi, tras 15 minutos de ejecución del mismo



El algoritmo *Force Atlas* ejecutado así sobre el grafo de estudio, permite empezar a extraer algunas conclusiones. De forma general, se percibe un gran núcleo formado por una serie de agrupaciones más o menos definidas. El hecho de que exista ese gran núcleo, se interpreta, como era de esperar, como una alta conexión de todos los contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Por otra parte, se aprecian una serie de agrupaciones más pequeñas de nodos que constituyen los clusters buscados. La existencia de tales grupos se traduce en una elevada conexión entre los contenidos matemáticos que los constituyen y una conexión más suave entre los contenidos de diferentes grupos.

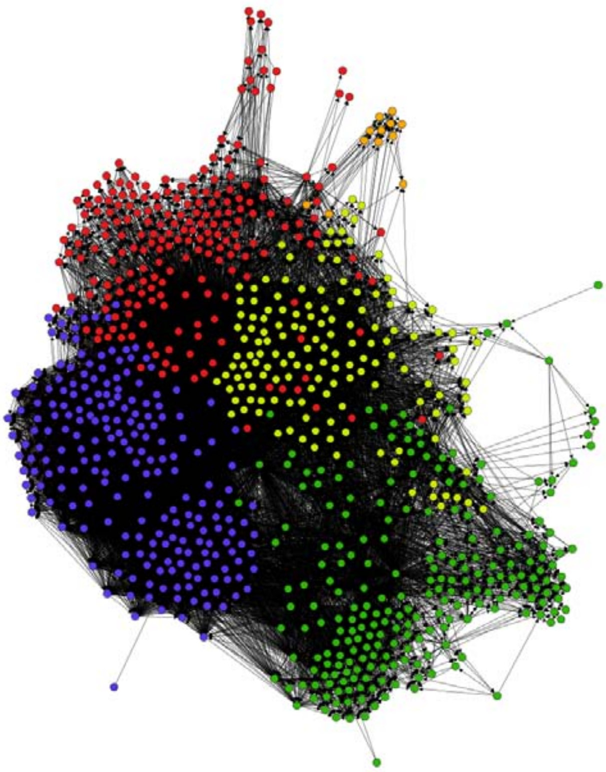
Resulta entonces de gran interés en este sentido, estudiar la relación existente entre estos clusters detectados a posteriori en el grafo de estudio, y las agrupaciones consideradas en esta investigación relativas a cursos académicos, bloques de contenido y unidades temáticas.

Para ello, es necesario conocer en mayor medida la estructura de clusters detectada por el algoritmo de disposición *Force Atlas*. Por ello, dentro de los procesos de detección de clusters (Girvan y Newman, 2002; Clauset et al., 2004; Newman, 2006b; Fortunato, 2010) y de la variedad de tipos de algoritmos existentes para tal fin (Castellano et al., 2004; Wu y Huberman, 2004; Newman, 2006a; Pons y Latapy, 2006), se emplea en esta investigación un algoritmo de optimización, concretamente el descrito en Blondel et al. (2008) e implementado en Gephi (véase apartado 8.2. Software Gephi).

Una vez ejecutado tal algoritmo sobre el grafo de estudio mediante este software, se obtiene que el máximo valor de la función de modularidad (Newman y Girvan, 2004) es de 0.369 para una partición del grafo de estudio en, exactamente, cinco clusters. Cabe mencionar al respecto que, estos cinco clusters identificados, se encuentran bien diferenciados por el algoritmo, ya que, acorde a los indicadores del mismo, eso ocurre para valores de la función de modularidad superiores a 0.3.

Para poder visualizar los cinco clusters identificados por este algoritmo sobre la representación gráfica del grafo de estudio llevada a cabo con el algoritmo *Force Atlas*, se hace uso de las diferentes opciones que Gephi ofrece al respecto (véase apartado 8.2. Software Gephi). Así, pueden distinguirse los clusters detectados por la coloración de los nodos que los constituyen en la representación gráfica de la Figura 66.

Figura 66. Detección de clusters en el grafo de estudio



Obsérvese como el algoritmo de detección de clusters empleado, ha permitido realizar una precisa partición del conjunto de nodos del grafo, en coherencia con la distribución de nodos determinada por el algoritmo *Force Atlas*.

Además del análisis y representación gráfica conjunto de los clusters identificados en el grafo de estudio, es posible analizarlos de forma independiente como subgrafos (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), gracias a las opciones de filtrado dinámico en tiempo real de nodos y arcos que ofrece Gephi.

Para una clara identificación de los cinco clusters, se han numerado de 0 a 4, por el propio software, de forma que el *Cluster 0* es el correspondiente a los nodos de color rojo, el *Cluster 1* a los de color azul, el *Cluster 2* a los de color naranja, el *Cluster 3* a los de color amarillo y el *Cluster 4* a los de color verde.

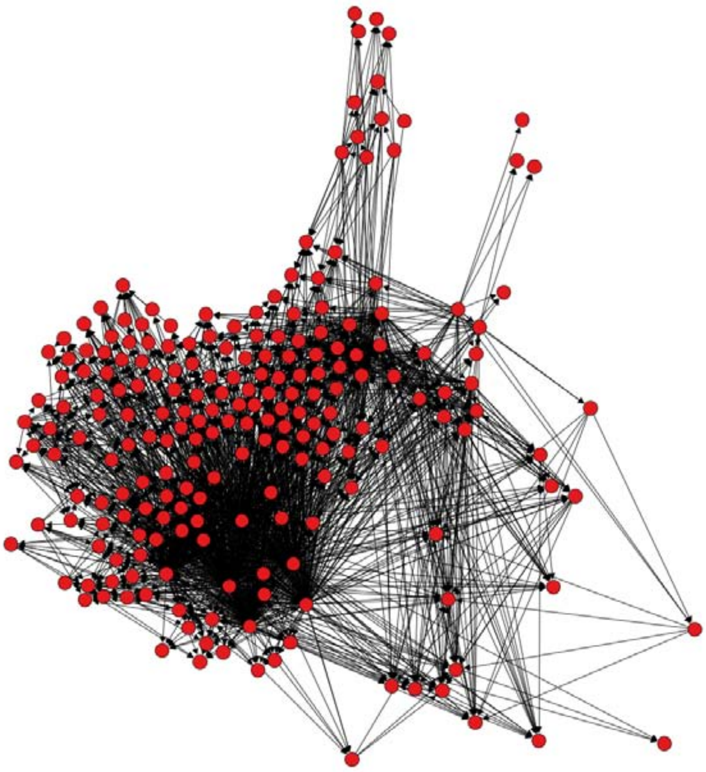
Los datos exactos relativos al orden y tamaño de cada uno de estos clusters se muestran en la Tabla 29. El listado de los contenidos que componen cada uno de los clusters puede verse en la Tabla 44 del Anexo.

Tabla 29. Orden y tamaño de los diferentes clusters

	Orden	Tamaño
Cluster 0	211	1.768
Cluster 1	212	5.188
Cluster 2	12	34
Cluster 3	148	2.105
Cluster 4	231	2.422
Total[54]	**814**	**11.517**

Puede observarse la distribución de cada uno de estos cinco clusters de forma independiente en las Figuras 67, 68, 69, 70 y 71, respectivamente.

Figura 67. Representación gráfica del *Cluster 0*



[54] Téngase en cuenta que la suma de la cantidad de arcos de los cinco clusters es menor que el tamaño del grafo de estudio (recuérdese que el grafo de estudio es de tamaño 17.669) debido a que solamente se consideran los arcos dentro de los clusters y no los entre nodos de distintos clusters.

Figura 68. Representación gráfica del *Cluster 1*

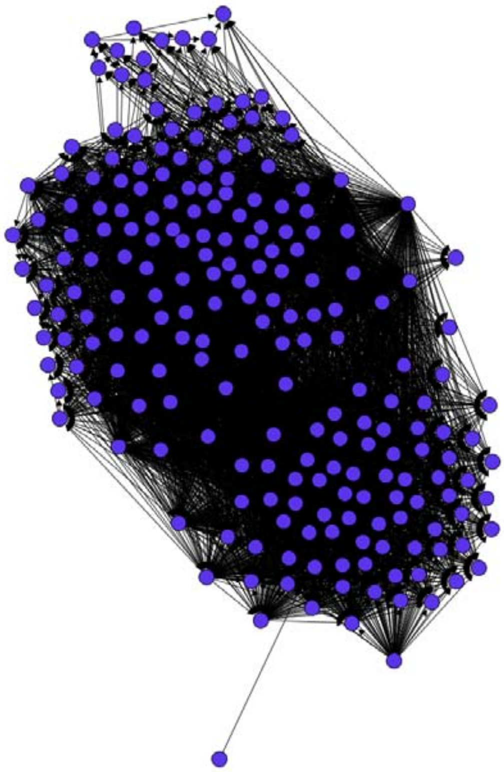


Figura 69. Representación gráfica del *Cluster 2*

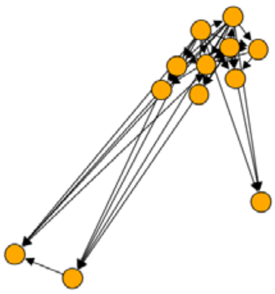


Figura 70. Representación gráfica del *Cluster 3*

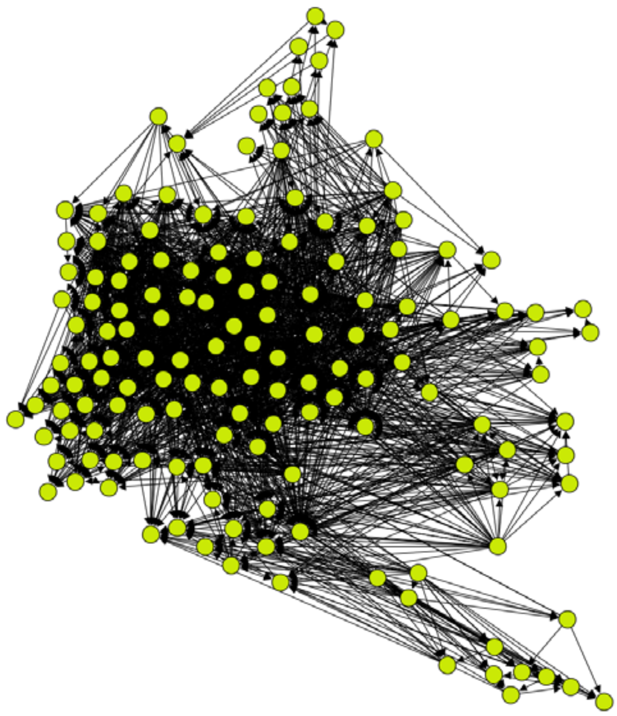
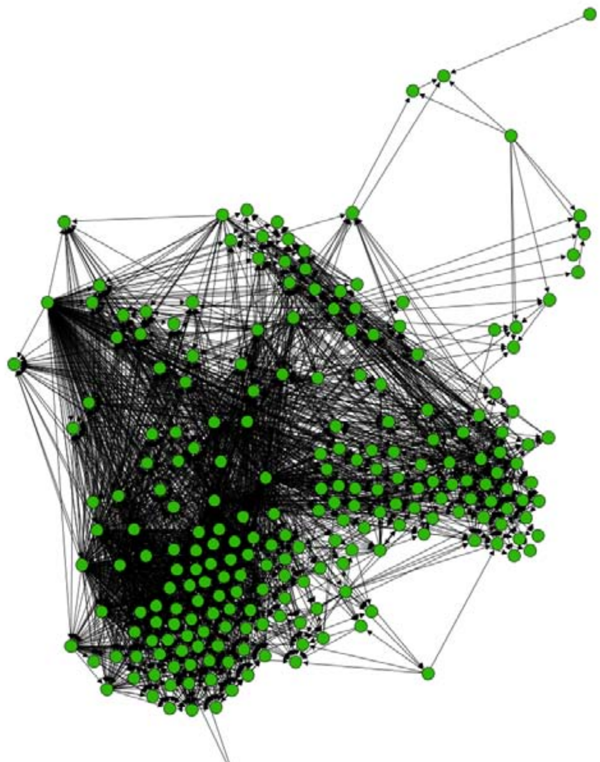


Figura 71. Representación gráfica del *Cluster 4*



Una vez detectada y visualizada la estructura de clusters del grafo de estudio, es momento de realizar un análisis comparativo en el contexto de este estudio entre estas cinco agrupaciones de contenidos matemáticos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria identificadas con posterioridad a la elaboración del grafo de estudio, y la organización establecida de los contenidos relativos a curso académico, bloque de contenido y unidad temática que se han decidido considerar en esta investigación (véase apartado 9.4. Categorización de los nodos del digrafo generador del grafo de estudio: atributos).

Comparativa entre clusters del grafo de estudio y cursos académicos, bloques de contenido y unidades temáticas

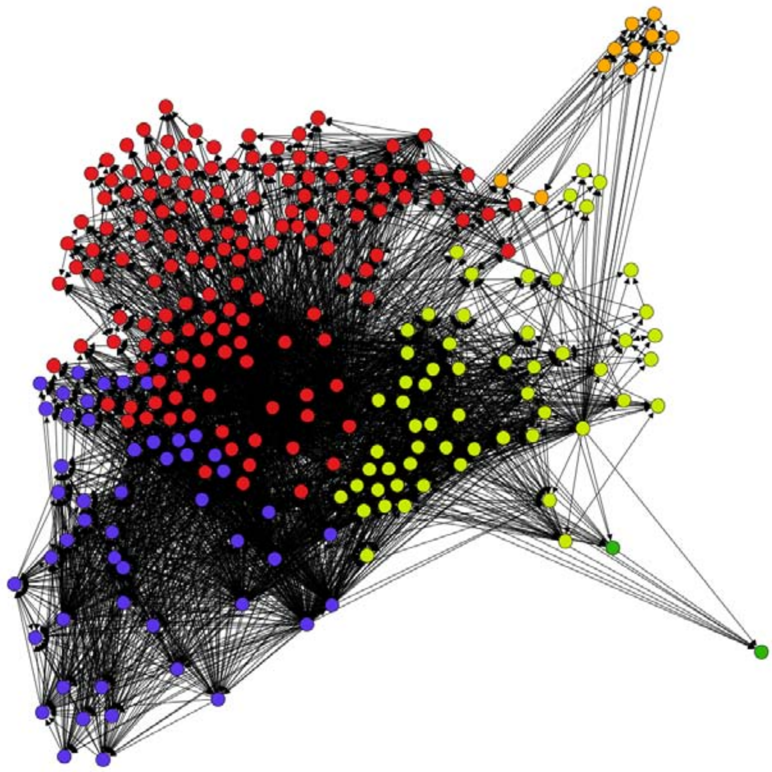
Se comienza en primer lugar con un análisis comparativo entre los clusters identificados y las agrupaciones de contenidos por bloques de contenido.

Clusters y bloques de contenido

En relación a los bloques de contenido considerados: *Aritmética*, *Álgebra*, *Análisis*, *Medida y geometría* y *Estadística y probabilidad* (véase apartado 9.4. Categorización de los nodos del digrafo generador del grafo de estudio: atributos), cabe destacar que, aunque coindicen en número con la cantidad de clusters identificados en el grafo de estudio, no parece existir una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos de grupos.

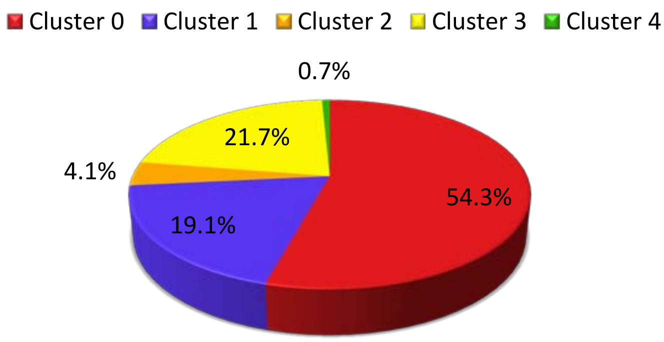
En primer lugar, si se realiza una representación gráfica del subgrafo del grafo de estudio correspondiente al bloque de contenido *Aritmética* (véase Figura 72), puede apreciarse como este no coincide con ninguno de los cinco clusters detectados.

Figura 72. Representación gráfica del bloque de contenido *Aritmética*



De hecho, este subgrafo está formado por contenidos de los cinco clusters identificados. La proporción en la que esto ocurre se muestra en el Gráfico 2.

Gráfico 2. Distribución del bloque de contenido *Aritmética*



Obsérvese que la mayor proporción de los contenidos de este bloque se corresponde con contenidos pertenecientes al *Cluster 0*. Sin embargo, los contenidos correspondientes al bloque *Aritmética* en el *Cluster 0* suponen un 68.7% del total de contenidos que constituyen el *Cluster 0*.

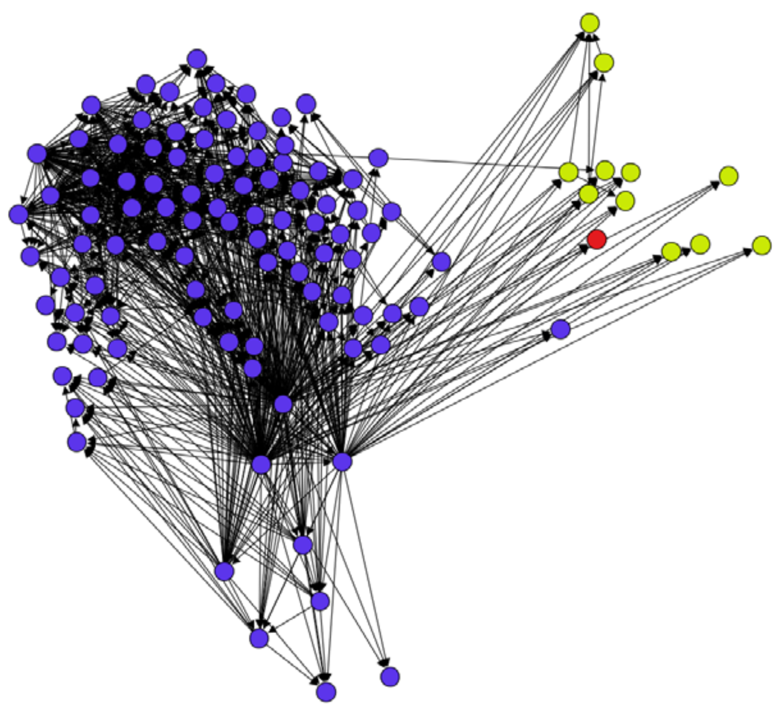
Por otro lado, aunque al *Cluster 2* solamente suponga el 4.1% de los contenidos del bloque de contenido *Aritmética*, debido al pequeño tamaño de este cluster, cabe destacar que los contenidos del bloque *Aritmética* suponen el 91.7% del total de contenidos del *Cluster 2*. De esta manera se tiene que prácticamente el *Cluster 2* está contenido en el bloque *Aritmética*. Pueden verse todos los datos relativos a este aspecto en la Tabla 30.

Tabla 30. Porcentaje de contenidos del bloque de contenido *Aritmética* en cada uno de los clusters

	Aritmética
Cluster 0	68.7
Cluster 1	24.1
Cluster 2	91.7
Cluster 3	39.2
Cluster 4	0.9

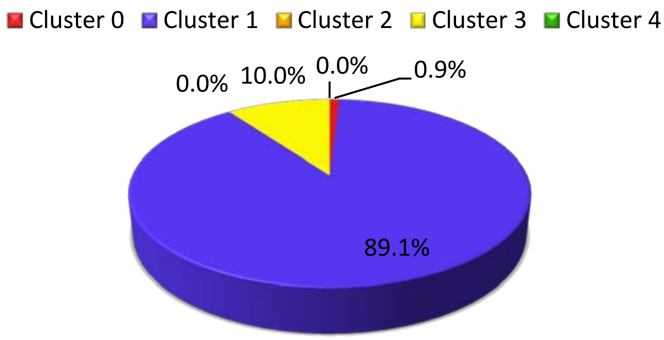
Respecto al bloque de contenido *Álgebra*, en la representación gráfica de la Figura 73 se observa como tampoco este bloque se corresponde completamente con ninguno de los clusters detectados.

Figura 73. Representación gráfica del bloque de contenido *Álgebra*



Sin embargo, una gran parte de sus contenidos, concretamente un 89.1%, son contenidos pertenecientes al *Cluster 1*. La distribución exacta de los contenidos del bloque de contenido *Álgebra* en relación a los cinco clusters se muestra en el Gráfico 3.

Gráfico 3. Distribución del bloque de contenido *Álgebra*



Obsérvese que este bloque de contenido está formado solamente por contenidos pertenecientes a tres de los cinco clusters, constituyéndolo casi en su totalidad contenidos del *Cluster 1* y del *Cluster 3*, ya que solamente uno de los contenidos del *Cluster 0* pertenece a este bloque.

Destacar que los contenidos del bloque *Álgebra* en el *Cluster 1* y *Cluster 3* suponen un 46.2% y 7.4% respectivamente, tal y como se muestra en la Tabla 31.

Tabla 31. Porcentaje de contenidos del bloque de contenido *Álgebra* en cada uno de los clusters

	Álgebra
Cluster 0	0.5
Cluster 1	46.2
Cluster 2	0.0
Cluster 3	7.4
Cluster 4	0.0

En lo referente al bloque de contenido *Análisis*, mediante la representación gráfica de sus nodos mostrada en la Figura 74, puede verse como un alto porcentaje de sus contenidos, exactamente un 82.7%, se corresponden también con contenidos del *Cluster 3*. El resto de contenidos se dividen en contenidos pertenecientes a los clusters 0, 1 y 4, no conteniendo ninguno de los nodos que forman el *Cluster 2*. En el Gráfico 4 pueden observarse los datos concretos de tales porcentajes.

Figura 74. Representación gráfica del bloque de contenido *Análisis*

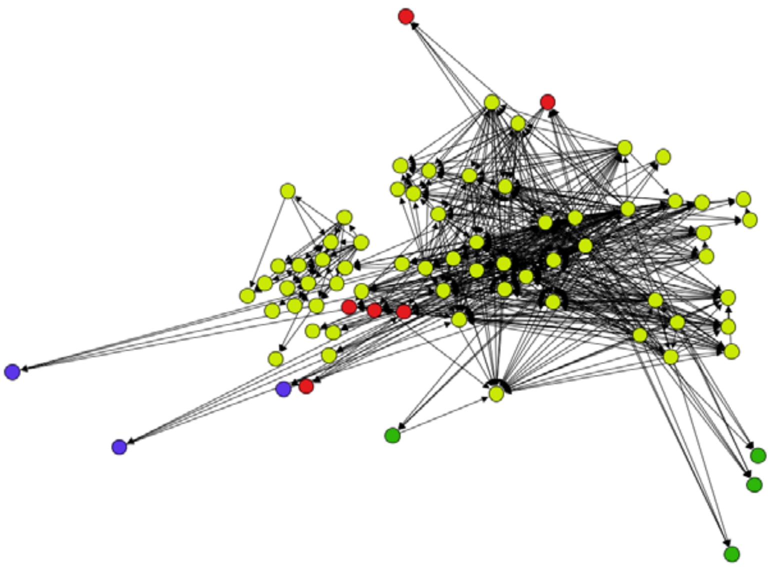
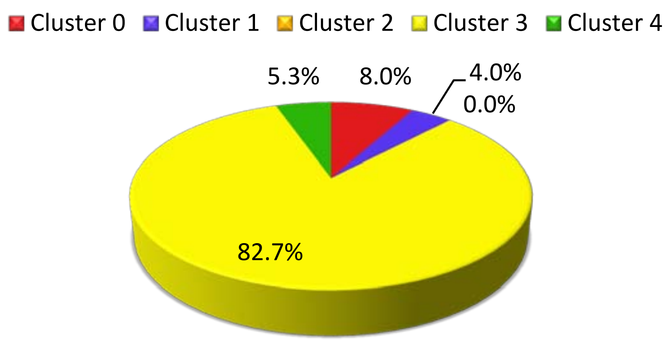


Gráfico 4. Distribución del bloque de contenido *Análisis*



Con respecto al *Cluster 3*, a pesar de constituir un 82.7% del conjunto de contenidos del bloque de contenido *Análisis*, esto solamente supone el 41.9% del total de contenidos del *Cluster 3* (véase Tabla 32), por lo que este cluster no está contenido en el bloque *Análisis*.

Tabla 32. Porcentaje de contenidos del bloque de contenido *Análisis* en cada uno de los clusters

	Análisis
Cluster 0	2.8
Cluster 1	1.4
Cluster 2	0.0
Cluster 3	41.9
Cluster 4	1.7

La representación gráfica correspondiente al subgrafo del bloque de contenido *Medida y geometría* de la Figura 75, revela la existencia en el mismo de contenidos pertenecientes a los cinco clusters identificados. El mayor porcentaje de sus contenidos, exactamente un 66.6%, corresponden a contenidos pertenecientes al *Cluster 4*, mientras que el menor porcentaje, un 0.3% corresponden al *Cluster 2* (véase Gráfico 5).

Figura 75. Representación gráfica del bloque de contenido *Medida y geometría*

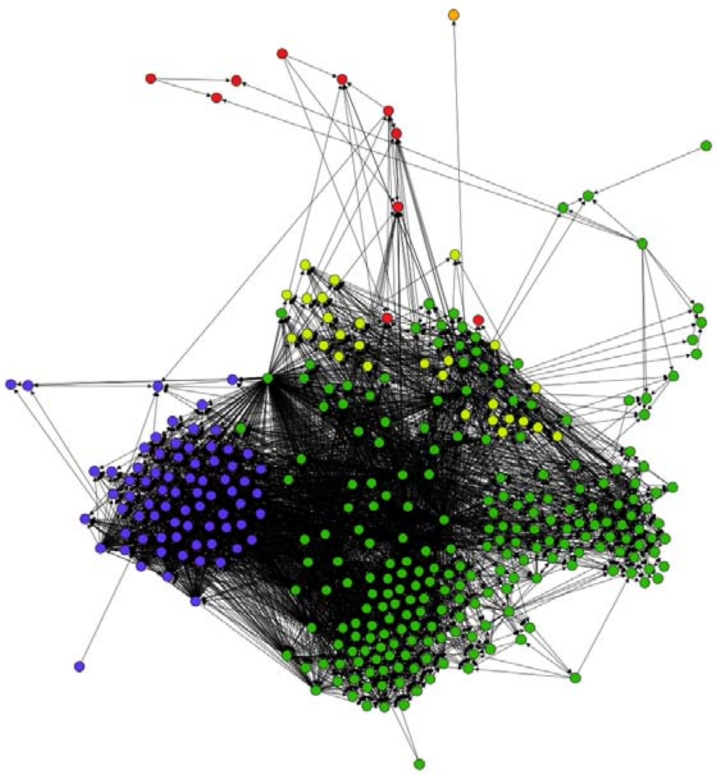
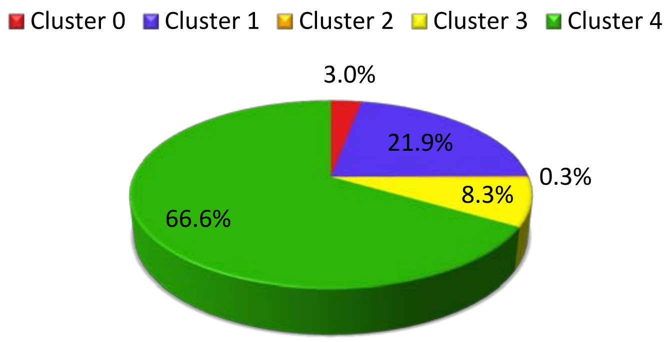


Gráfico 5. Distribución del bloque de contenido *Medida y geometría*



Cabe destacar que aunque el *Cluster 4* suponga un 66.6% del conjunto total de contenidos del bloque de contenido *Medida y geometría*, los contenidos de este bloque en el *Cluster 4* suponen un 97.4% de su total de contenidos. Este dato, junto con el del resto de clusters, puede consultarse en la Tabla 33.

Tabla 33. Porcentaje de contenidos del bloque de contenido *Medida y geometría* en cada uno de los clusters

	Medida y geometría
Cluster 0	4.7
Cluster 1	34.9
Cluster 2	8.3
Cluster 3	18.9
Cluster 4	97.4

En relación al último bloque de contenido considerado, el relativo a *Estadística y probabilidad* (representación gráfica en la Figura 76), destacar que posee contenidos pertenecientes a cuatro de los cinco clusters determinados. Al igual que en el bloque de contenido *Aritmética*, la mayor parte de sus contenidos, concretamente un 76.6%, se corresponden con contenidos del *Cluster 0* (véase Gráfico 6). Sin embargo, solamente el 23.2% del total de contenidos de dicho cluster corresponde con contenidos del bloque de *Estadística y probabilidad* (véase Tabla 34).

Figura 76. Representación gráfica del bloque de contenido *Estadística y probabilidad*

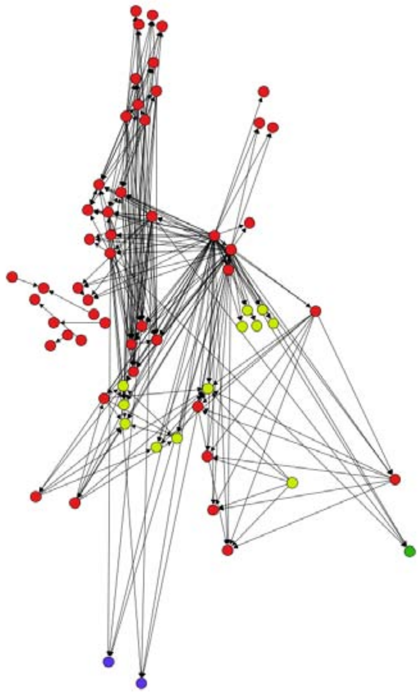


Gráfico 6. Distribución del bloque de contenido *Estadística y probabilidad*

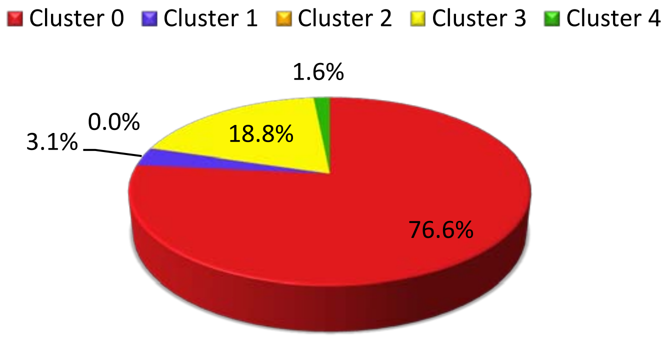


Tabla 34. Porcentaje de contenidos del bloque de contenido *Estadística y probabilidad* en cada uno de los clusters

	Estadística y probabilidad
Cluster 0	23.2
Cluster 1	0.9
Cluster 2	0.0
Cluster 3	8.1
Cluster 4	0.4

Con todo lo anterior, y en base a la minuciosa comparación realizada entre los cinco grupos de contenidos establecidos durante la elaboración del grafo de estudio, correspondientes a los bloques de contenido: *Aritmética*, *Álgebra*, *Análisis*, *Medida y geometría* y *Estadística y probabilidad*, y los cinco grupos identificados a posteriori mediante un método de detección de clusters aplicado a dicho grafo, se pueden extraer conclusiones verdaderamente interesantes.

Así, desde un punto de vista general, puede concluirse que existe al menos otra forma de agrupación de contenidos perfectamente viable, diferente a la previamente establecida y deducida a partir de lo reflejado, tanto en la normativa educativa de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, como en algunas de sus concreciones curriculares correspondientes a la materia de Matemáticas (véase Capítulo 1. El marco legal de la Educación Secundaria Obligatoria).

Es preciso destacar que esta nueva opción de organización de contenidos no se ve influenciada por ninguna otra forma de agrupación, ya que es identificada con posterioridad a la elaboración del grafo de estudio. Para tal propósito, se tienen en cuenta, únicamente, los arcos existentes entre los diferentes nodos, y por tanto, los pares ordenados de contenidos que definen la relación de requerimiento establecida.

Destacar además que ninguno de los cinco clusters identificados por modularidad está contenido en su totalidad en ninguno de los cinco grupos establecidos a priori correspondientes a los bloques de contenido, por lo que la nueva agrupación identificada no refina en ningún sentido a la ya establecida, sino que la enriquece con novedosas agrupaciones de contenidos.

Clusters y unidades temáticas

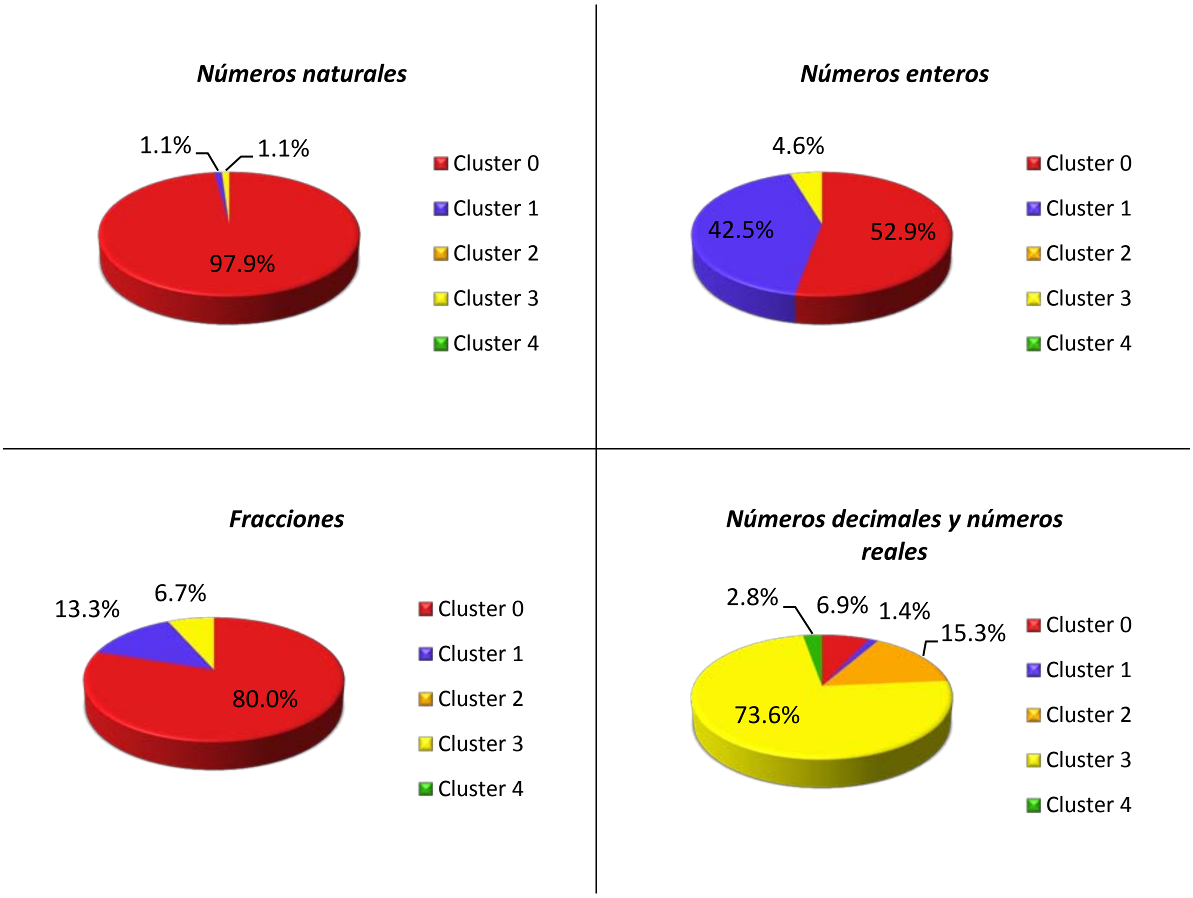
Respecto a la relación entre los clusters identificados y las diferentes unidades temáticas consideradas en cada uno de los bloques de contenido (véase apartado 9.4. Categorización de los nodos del digrafo generador del grafo de estudio: atributos), cabe destacar que no existe un único tipo de relación entre ellos.

Para las unidades temáticas de *Números naturales*, *Números enteros*, *Fracciones* y *Números decimales y números reales* que forman el bloque de contenido *Aritmética*, puede observarse en el Gráfico 7 una variedad de situaciones.

Así, si bien la unidad temática de *Números naturales* consta casi exclusivamente de contenidos pertenecientes al *Cluster 0*, las unidades de *Números enteros* y *Fracciones*, a pesar de contener también gran proporción de contenidos correspondientes al *Cluster 0*, están formadas también por contenidos del *Cluster 1* y *Cluster 3* en muy diferentes porcentajes.

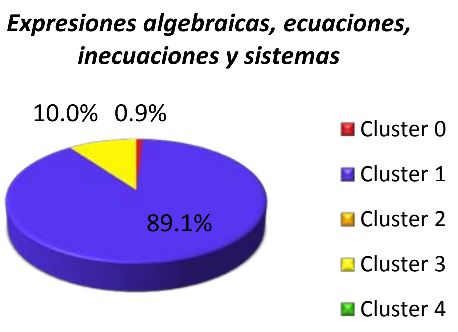
Por el contrario, la unidad de *Números decimales y números reales*, además de poseer contenidos de todos y cada uno de los cinco clusters detectados, no posee una mayor proporción de contenidos del *Cluster 0*, sino del *Cluster 3*.

Gráfico 7. Distribución de las unidades temáticas correspondientes a *Aritmética*



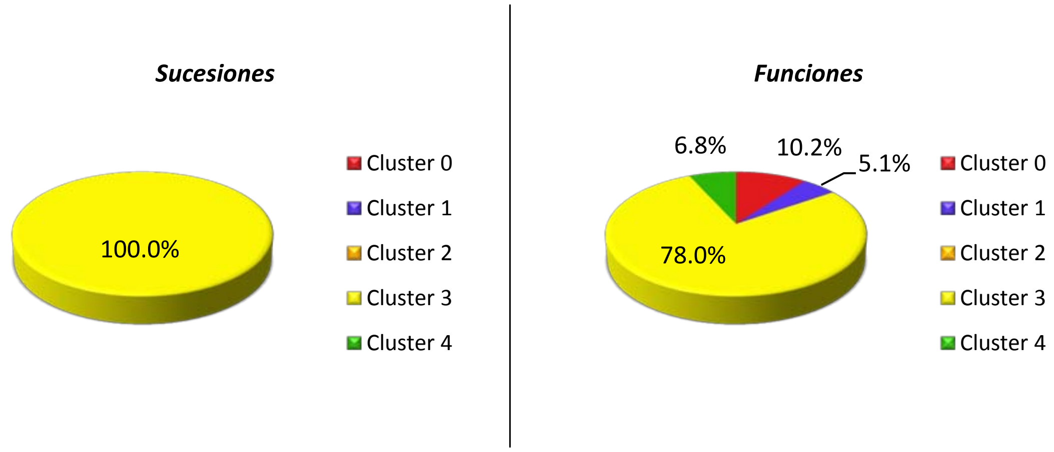
En relación a la unidad temática *Expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y sistemas*, correspondiente al bloque de contenido *Álgebra*, puede observarse en el Gráfico 8 como la mayoría de sus contenidos pertenecen también al *Cluster 1*, aunque posee también contenidos del *Cluster 3* y, en menor medida, del *Cluster 0*.

Gráfico 8. Distribución de la unidad temática correspondiente a *Álgebra*



Para la unidad temática *Sucesiones*, perteneciente al bloque *Análisis*, ocurre algo muy diferente, y es que la totalidad de los contenidos de esta unidad, son contenidos del *Cluster 3*. Hechos coincidentes como estos son los que a priori cabría esperar, si bien puede comprobarse que las situaciones son bien dispares. Para la unidad de *Funciones*, del mismo bloque de contenido, aunque un 78% de sus contenidos son del *Cluster 3*, está formada también por contenidos del *Cluster 0*, *Cluster 1* y *Cluster 4*. Los porcentajes exactos de ambas unidades pueden verse en el Gráfico 9.

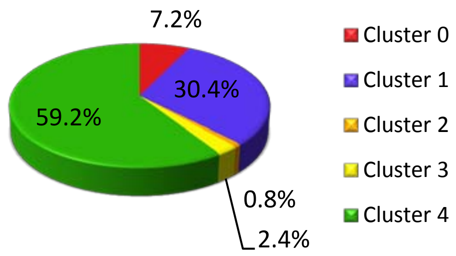
Gráfico 9. Distribución de las unidades temáticas correspondientes a *Análisis*



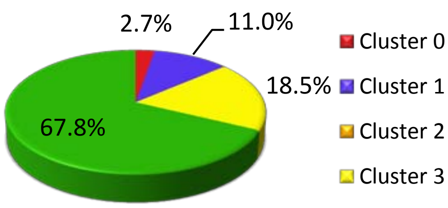
La composición de las cinco unidades temáticas correspondientes al bloque de *Medida y geometría* es, en cierto sentido, homogénea, ya que todas ellas tienen el mayor porcentaje de sus contenidos en el *Cluster 4* y, de forma general, un alto porcentaje también, aunque en menor medida, de contenidos del *Cluster 1*. Se muestran los porcentajes exactos en el Gráfico 10.

Gráfico 10. Distribución de las unidades temáticas correspondientes a *Medida y geometría*

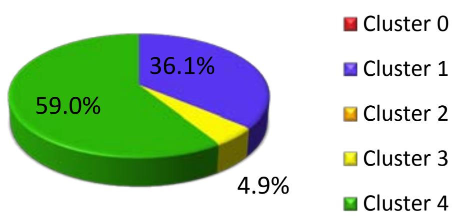
Magnitud y medida



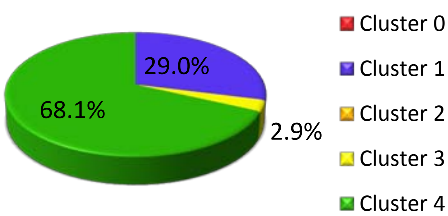
Figuras geométricas en el plano



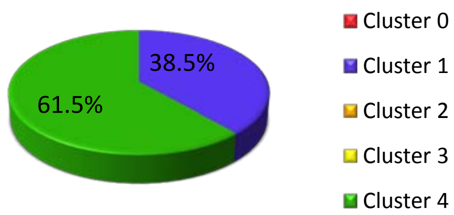
Medidas de figuras geométricas en el plano



Figuras geométricas en el espacio

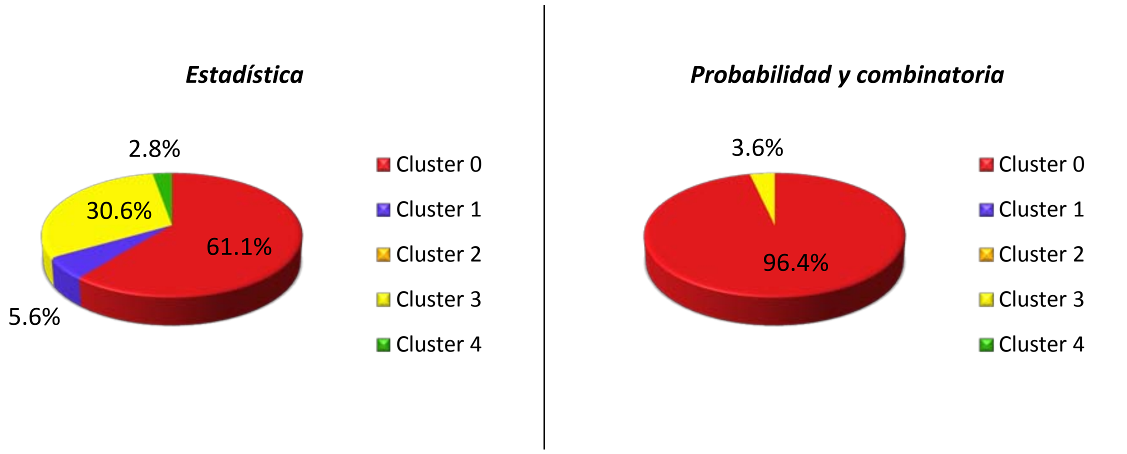


Medidas de figuras geométricas en el espacio



Las unidades temáticas de *Estadística* y *Probabilidad y combinatoria* del bloque de *Estadística y probabilidad*, poseen, sin embargo, un alto porcentaje de contenidos del *Cluster 0*. Así, si para la unidad de *Estadística* este porcentaje ya es alto, un 61.1%, para la unidad de *Probabilidad y combinatoria* es aún mayor, un 96.4%, por lo que prácticamente la totalidad de los contenidos de esta unidad pertenecen a tal cluster. En el Gráfico 11 pueden verse el resto de porcentajes correspondientes a estas dos unidades.

Gráfico 11. Distribución de las unidades temáticas correspondientes a *Estadística y probabilidad*



Con todo el análisis comparativo anterior entre las agrupaciones de contenidos establecidas durante la elaboración del grafo de estudio, relativas a las unidades temáticas y a los grupos identificados a posteriori de la elaboración, mediante el empleo de un método de detección de clusters, se extraen nuevas y relevantes conclusiones.

Por la naturaleza de los datos, y al tratarse de catorce unidades temáticas establecidas a priori, y cinco grupos identificados a posteriori, cabría esperar que todos, o al menos la mayoría de los contenidos de una unidad, pertenecieran a un mismo cluster. Sin embargo, se tiene que solamente seis de las catorce unidades, contienen más del 75% de sus contenidos pertenecientes a un mismo cluster.

Acorde a las características de los clusters identificados, la alta densidad de los arcos entre nodos de un mismo cluster y la baja densidad de los arcos entre nodos de diferentes clusters, se traduce en un elevado número de pares ordenados de contenidos en la relación requerimiento de un mismo cluster y un escaso número de pares ordenados entre contenidos de clusters diferentes. Por todo ello, parece muy lógica la creación de agrupaciones de contenidos dentro de cada cluster. De esta forma puede conseguirse una organización de contenidos que no atienda únicamente a la temática de los mismos, sino a otros criterios. Aspecto, por otra parte, claramente defendido por Ausubel y Barberán (2002) como ayuda a la adquisición del conocimiento.

Todo lo anterior demuestra que la relación de requerimiento establecida en el presente estudio, da lugar, al menos, a otra forma de agrupación de contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, diferente a la establecida a priori en esta investigación, y deducida a partir tanto de la normativa educativa correspondiente a esta etapa, como de algunas de sus concreciones curriculares.

Clusters y cursos académicos

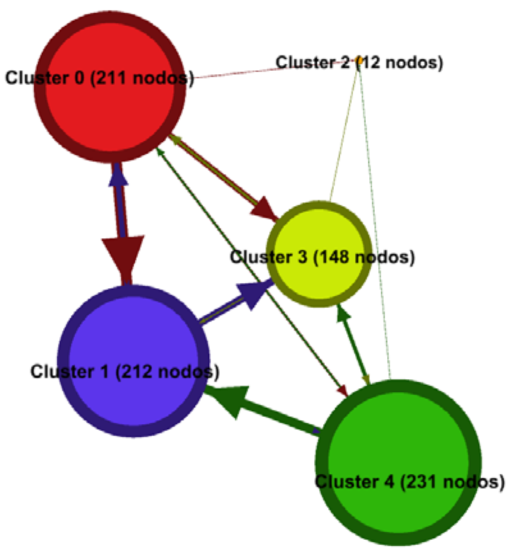
Respecto a los cuatro cursos académicos que forman la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria (junto con el formado por aquellos contenidos de los considerados que son propios de cursos anteriores al primer curso de la etapa), y los clusters descritos, parece lógico pensar que no exista relación entre ambos conjuntos de grupos.

Así, tras un análisis comparativo entre los distintos grupos, similar al realizado anteriormente para los bloques de contenido y unidades temáticas, cabe señalar que no se observa ninguna relación de alto interés.

Por otro lado, además de la identificación de clusters realizada y su consecuente nueva organización de contenidos, es preciso tener en cuenta otras posibilidades de agrupación de los mismos. Así, aunque con una finalidad totalmente diferente, la opción de agrupación de un determinado conjunto de nodos en uno solo puede ser de gran utilidad para la presentación de contenidos en diferentes niveles de agrupación.

El software Gephi ofrece esta posibilidad de forma que, por ejemplo, puede obtenerse el grafo resultante de agrupar los contenidos pertenecientes a cada uno de los clusters identificados en un único nodo. La Figura 77 muestra una representación gráfica de esta posibilidad.

Figura 77. Representación gráfica del grafo resultante tras agrupar los contenidos pertenecientes a un mismo cluster



De esta forma pueden analizarse las relaciones existentes entre los diferentes clusters de forma global. Si se tiene en cuenta, además, que este tipo de agrupaciones de nodos pueden realizarse atendiendo a cualquier criterio que se especifique, esta técnica de presentación puede poner en práctica la visualización de diferentes niveles de elaboración en un sentido similar al de Reigeluth (véase apartado 3.4. Teoría de la elaboración de Reigeluth).

10.3. Análisis de grado en el grafo de estudio

Un análisis que también permite extraer información de interés sobre la estructura del grafo de estudio es un análisis de grado del mismo. Este tipo de análisis resulta fundamental para la identificación de contenidos matemáticos clave dentro del conjunto de contenidos considerado.

Debido a que esta identificación se produce de acuerdo con la posición relativa de los contenidos matemáticos dentro de la estructura del grafo de estudio, la relación de requerimiento establecida resulta determinante al respecto.

Además, al tratarse concretamente de un digrafo, el estudio del grado de entrada y grado de salida también es viable (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos), por lo que la determinación de contenidos clave puede llevarse a cabo desde dos puntos de vista.

Para ello es preciso, en primer lugar, interpretar adecuadamente en este contexto ambos conceptos. En relación al grado de entrada de un nodo, se encuentra el conjunto de predecesores directos[55] del nodo en cuestión (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). En el grafo de estudio este concepto se interpreta como el conjunto de contenidos matemáticos que son prerrequisito del contenido que representa tal nodo.

De esta forma, el grado de entrada de un contenido indica la cantidad de contenidos prerrequisito que este contenido posee dentro del conjunto de contenidos considerado. Con ello se tiene en el contexto de esta investigación que, cuanto mayor sea el grado de entrada de un contenido, mayor cantidad de contenidos requerirá para su conocimiento.

[55] Puesto que el grafo de estudio es transitivo, se tiene que el conjunto de predecesores directos de un nodo coincide con su conjunto de predecesores o espectro transitivo inverso. De la misma manera que el conjunto de sucesores directos de un nodo coincide con su conjunto de sucesores o espectro transitivo.

Respecto al grado de salida, se encuentra el conjunto de sucesores directos del nodo en cuestión (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). Así, en el grafo de estudio, el conjunto de sucesores directos de un nodo se interpreta como el conjunto de contenidos matemáticos para los que tal contenido es prerrequisito.

Con ello, el grado de salida de un nodo debe interpretarse, en el contexto de estudio, como el número de contenidos para los que el contenido correspondiente a ese nodo es prerrequisito. En este sentido se tiene que, cuanto mayor sea el grado de salida de un contenido, más requerido será por otros de los contenidos del conjunto.

El análisis del grado de los nodos del grafo de estudio, esto es, de todos los contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tratados en esta investigación, se realiza desde dos puntos de vista.

En primer lugar, se estudia el grado de entrada y el grado de salida de cada contenido dentro del cluster[56] al que pertenece (véase apartado 10.2 Detección y análisis de clusters en el grafo de estudio), identificándose, para cada uno de ellos, los contenidos con mayor grado de entrada y mayor grado de salida.

En segundo lugar, se realiza un análisis similar al anterior pero a nivel global de grafo, es decir, se calcula el grado de entrada y de salida de cada nodo sin tener en cuenta el cluster al que cada uno de ellos pertenece, y se identifican los contenidos de mayor grado de entrada y salida.

Cabe mencionar que para los cálculos y análisis descritos relativos al grado, se emplea tanto el software Gephi, como la aplicación Microsoft Excel y el paquete estadístico SPSS.

Análisis de grado en los clusters

La identificación de los contenidos que tienen una posición central dentro de un cluster, en el sentido de poseer un gran número de conexiones con el resto de los contenidos del mismo cluster,

[56] Recuérdese que la clasificación del conjunto de nodos del grafo de estudio en clusters es realmente una partición, por lo que cada contenido pertenece a un único cluster, de los cinco identificados.

resulta fundamental. Ello es posible analizarlo a través del cálculo del grado de los nodos pertenecientes a cada cluster.

Es preciso tener en cuenta que los subgrafos que constituyen los clusters son dirigidos, ya que son subgrafos de un digrafo. Por ello, y por el tipo de información que representa el grafo de estudio, es por lo que se decide analizar los aspectos referidos al grado de sus nodos mediante el estudio de su grado de entrada y grado de salida.

Para el análisis de los grados de los nodos de los diferentes clusters, es importante no olvidar el carácter transitivo del grafo de estudio. Recuérdese que la transitividad fue considerada con la finalidad de determinar de modo preciso y completo todos los pares de contenidos que definen la relación de requerimiento considerada, de forma que las decisiones del investigador relativas a las distinciones entre contenidos prerrequisito y contenidos prerrequisito inmediatos, no perturbaran la modelización de la información real en estructura de grafo (véase apartado 9.7. Preproceso del digrafo generador del grafo de estudio (II): clausura transitiva).

Cluster 0

Para el subgrafo relativo al *Cluster 0*, formado por 211 nodos y 1.768 arcos, con grado medio 8.4, se obtiene la distribución del grado de entrada de sus nodos que se muestra en el Gráfico 12, donde puede verse para cada uno de los valores del grado de entrada de este cluster, el número de nodos con tal valor. Los datos exactos pueden consultarse en la Tabla 39 del Anexo.

Obsérvese que el grado de entrada de los nodos de este cluster toma valores en el intervalo cerrado de extremos 0 y 22. Además, aunque el grado de entrada más común es 6, este solamente lo tienen 27 nodos de los 211, esto es, un 12.8 %.

Los nodos de este cluster con mayor grado de entrada se corresponden con los contenidos de *Correlación negativa*, *Correlación positiva* y *Recta de regresión*, con valores de 22, 22 y 20 respectivamente. Ello significa que estos contenidos necesitan exactamente de otros 22, 22 y 20 contenidos respectivamente, por lo que, en cierto sentido, son los tres contenidos más complejos del conjunto de contenidos que constituyen el *Cluster 0*.

La Figura 78 muestra una representación gráfica del subgrafo correspondiente al *Cluster 0*, de forma que el tamaño de sus nodos es proporcional al grado de entrada de los mismos.

Gráfico 12. Distribución del grado de entrada de los nodos del *Cluster 0*

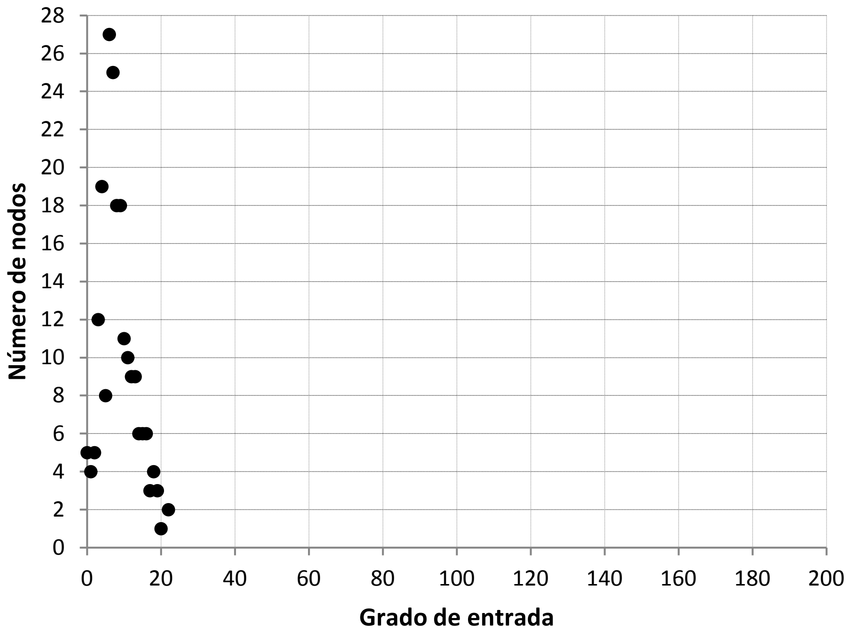
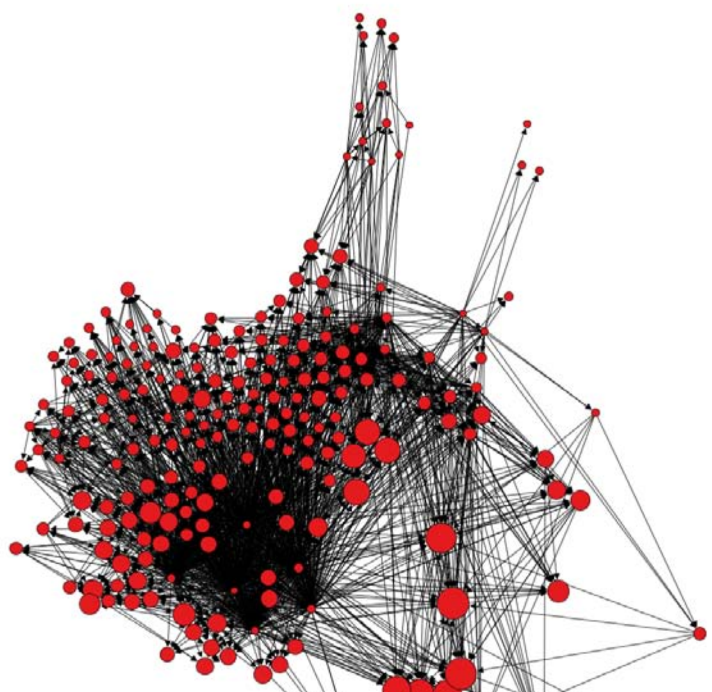


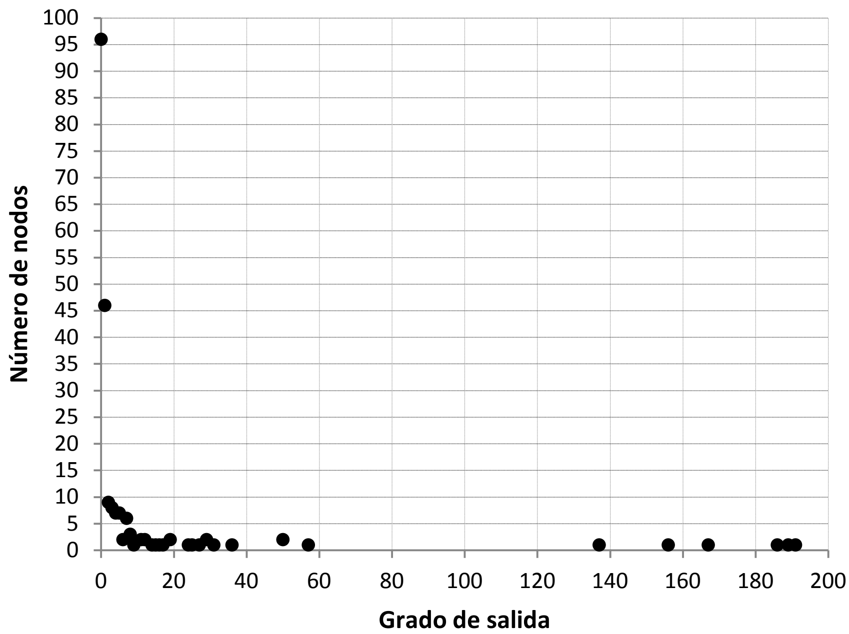
Figura 78. Representación gráfica del *Cluster 0* según el grado de entrada de sus nodos



El grado de salida del *Cluster 0* oscila entre 0 y 191, y está distribuido de forma que el 2.8% de sus nodos posee grado de salida mayor que 135 y el resto, 97.2%, grados de salida menores de 60, no existiendo nodos en este cluster con grado de salida entre 60 y 135. En el Gráfico 13 se muestra la distribución exacta. Para una información más detallada puede consultarse la Tabla 39 del Anexo.

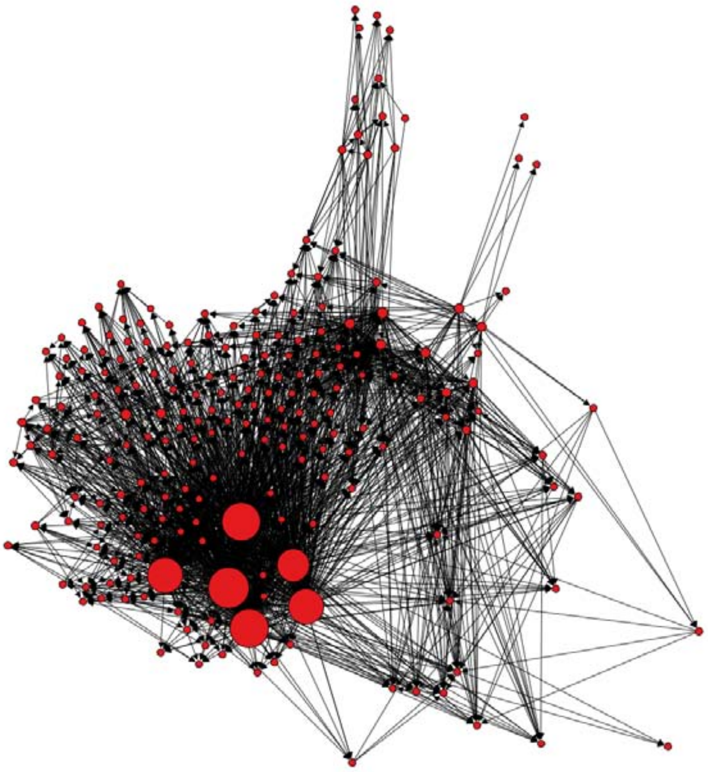
Cabe destacar además que un 21.8% de sus nodos poseen grado de salida 1 y un 45.5% grado de salida 0. Estos últimos datos suponen que el 21.8% de los contenidos de este cluster son prerrequisitos para solo otro contenido del mismo, y que casi la mitad de sus contenidos no son contenidos prerrequisito de ningún contenido del cluster.

Gráfico 13. Distribución del grado de salida de los nodos del *Cluster 0*



En la Figura 79 se muestra una representación gráfica del subgrafo correspondiente al *Cluster 0*, de forma que el tamaño de sus nodos es proporcional al grado de salida de los mismos. Con esta representación pueden identificarse claramente aquellos nodos con mayor grado de salida.

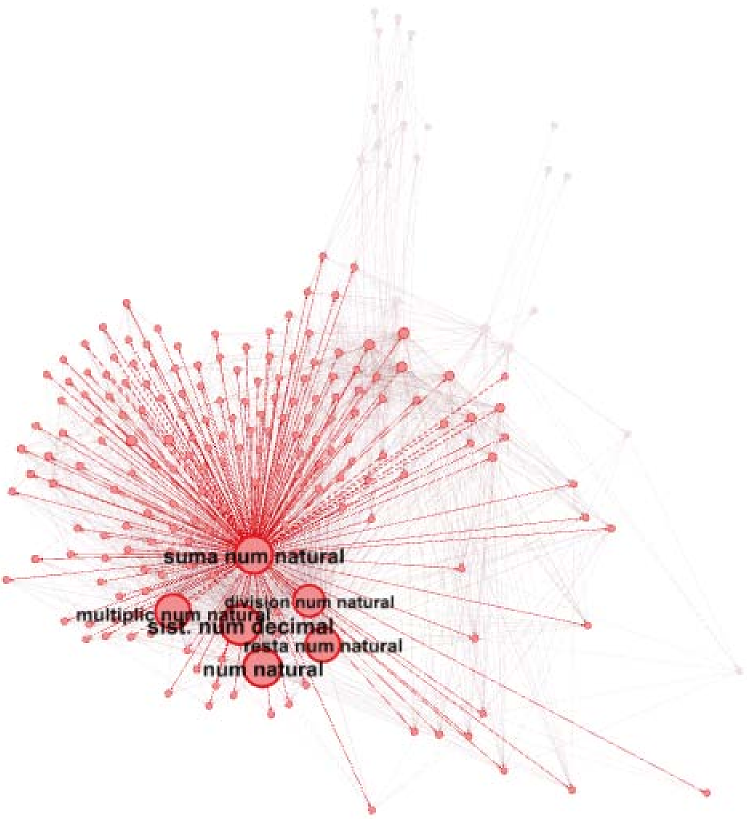
Figura 79. Representación gráfica del *Cluster 0* según el grado de salida de sus nodos



Los 6 nodos de mayor tamaño representan los nodos con grado de salida mayor de 135. Estos nodos se corresponden exactamente con los contenidos de *Sistema de numeración decimal*, *Números naturales*, *Suma de números naturales*, *Resta de números naturales*, *Multiplicación de números naturales* y *División de números naturales*, con grados de salida 191, 189, 186, 167, 156 y 137 respectivamente. Ello significa que estos contenidos son prerrequisitos de otros 191, 189, 186, 167, 156 y 137 contenidos, respectivamente, del mismo cluster, hecho que fundamenta la importancia de estos contenidos. Concretamente, estos contenidos son necesarios para la comprensión de más del 60% de los contenidos que constituyen este cluster.

En la Figura 80 puede observarse la ubicación exacta de estos 6 contenidos en el subgrafo correspondiente a este cluster, así como los arcos salientes del contenido *Suma de números naturales*.

Figura 80. Arcos en el *Cluster 0* con nodo origen el contenido *Suma de números naturales*



Cluster 1

La distribución del grado de entrada para este cluster, de grado medio 24.5, puede verse en el Gráfico 14, y más detalladamente en la Tabla 40 del Anexo. Obsérvese que el grado de entrada oscila entre 0 y 44, siendo el grado de entrada más habitual el 32 con un total de 25 nodos con ese grado y el siguiente el 33 con un total de 24 nodos.

La representación gráfica de la Figura 81 muestra el tamaño de los nodos del *Cluster 1* acorde al grado de entrada de los mismos.

Gráfico 14. Distribución del grado de entrada de los nodos del *Cluster 1*

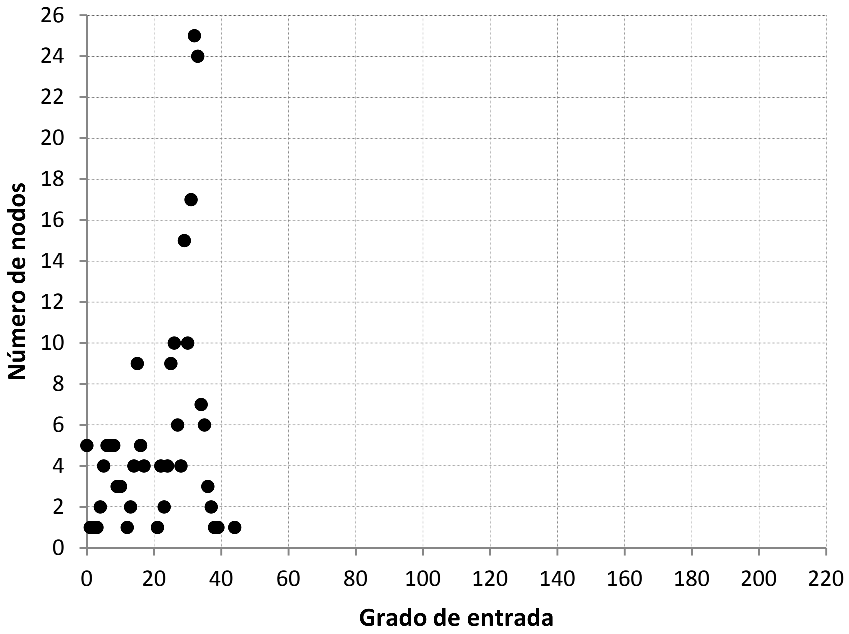
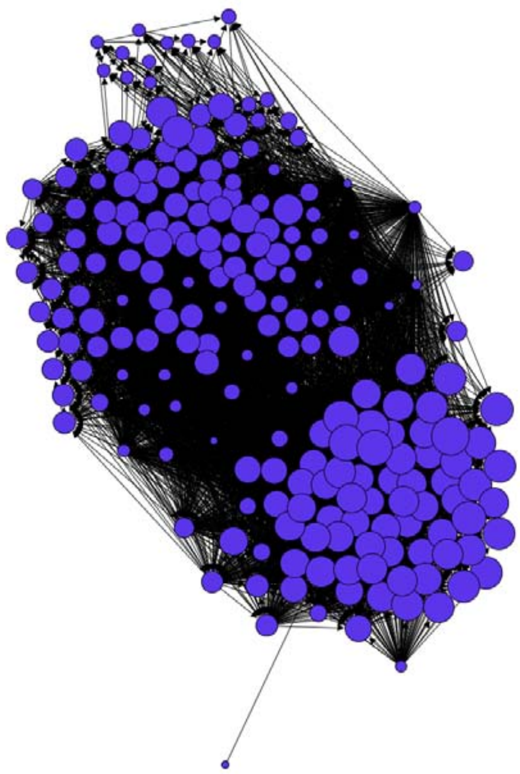


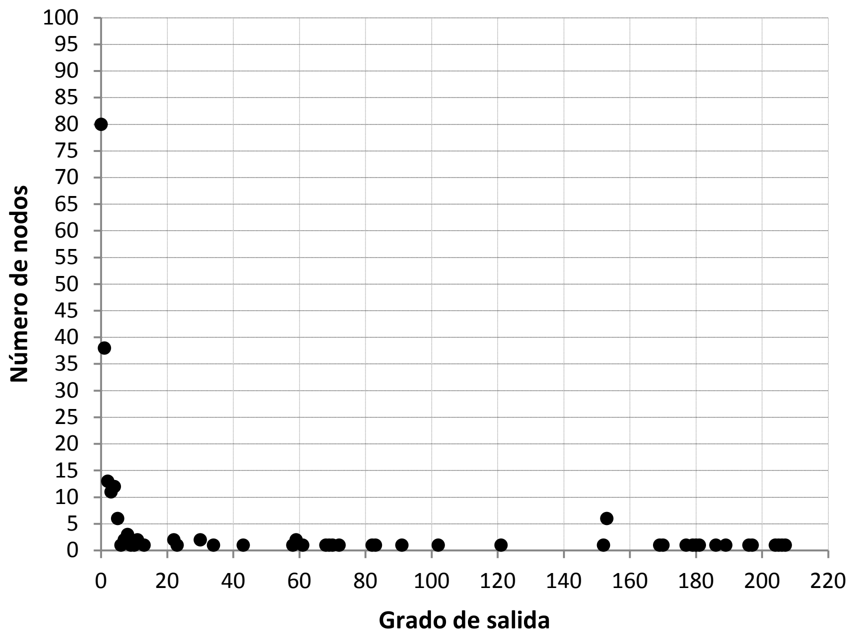
Figura 81. Representación gráfica del *Cluster 1* según el grado de entrada de sus nodos



El contenido del *Cluster 1* con mayor grado de entrada es la *Resolución de ecuaciones de fracciones algebraicas*, con un valor de 44, lo que significa que posee 44 contenidos prerrequisito propios del *Cluster 1*.

Respecto a la distribución del grado de salida de los nodos del *Cluster 1*, puede verse en el Gráfico 15 y más detalladamente en la Tabla 40 del Anexo, como existen 4 nodos con grado de salida mayor que 200. Además, el 17.9% de los nodos poseen grado de salida 1, y un 37.7% grado de salida 0. En la Figura 82 se muestra una representación gráfica del subgrafo correspondiente al *Cluster 1*, en el que el tamaño de sus nodos es proporcional al grado de salida de los mismos.

Gráfico 15. Distribución del grado de salida de los nodos del *Cluster 1*



Los contenidos del *Cluster 1* con mayor grado de salida corresponden a *Números enteros*, *Representación sobre la recta numérica de números naturales*, *Representación sobre la recta numérica de números enteros*, *Valor absoluto de un número entero*, *Factor de un número entero* y *Multiplicación de números enteros*, con grados de salida 207, 206, 205, 204, 197 y 196 respectivamente. Ello indica que estos contenidos son contenidos prerrequisito para otros 207, 206, 205, 204, 197 y 196 contenidos respectivamente pertenecientes al *Cluster 1*. Lo que supone que estos contenidos son necesarios para más del 90% de los nodos que constituyen este cluster. En la Figura 83 se resaltan los arcos salientes del contenido *Números enteros*.

Figura 82. Representación gráfica del *Cluster 1* según el grado de salida de sus nodos

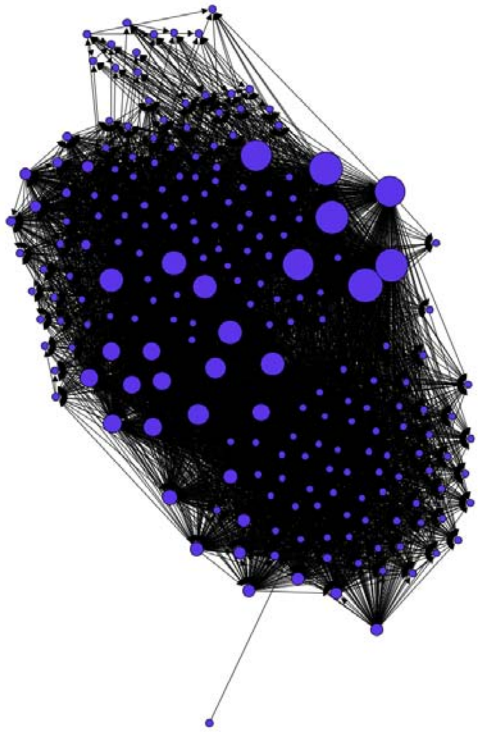
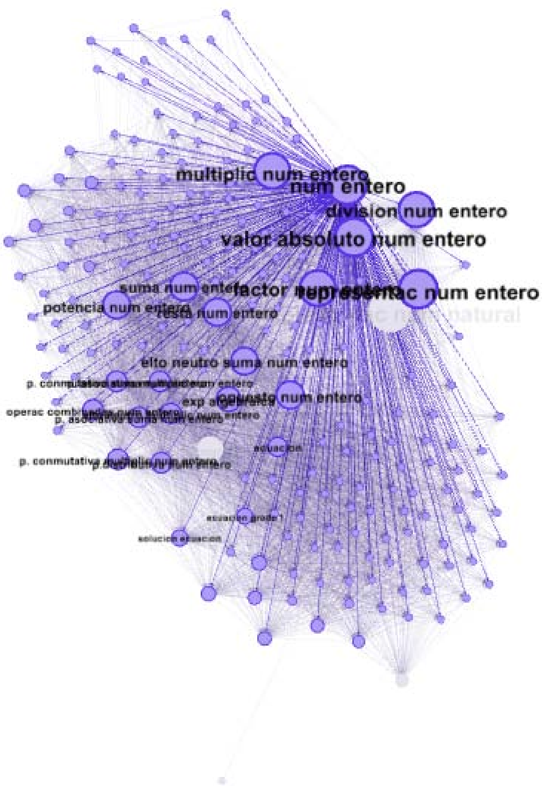


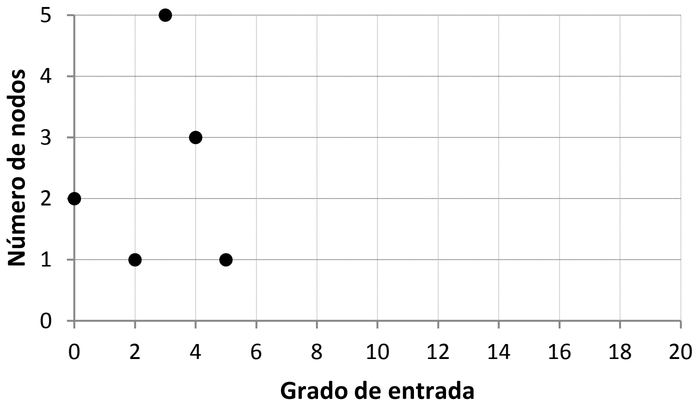
Figura 83. Arcos en el *Cluster 1* con nodo origen el contenido *Números enteros*



Cluster 2

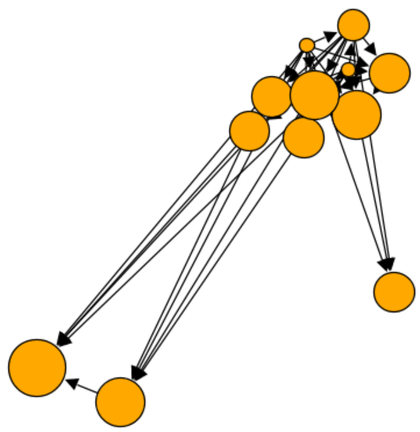
El grado de entrada de este cluster, de grado medio 2.8, toma valores en el intervalo cerrado de extremos 0 y 5. La distribución exacta puede verse en el Gráfico 16 y más detalladamente en la Tabla 41 del Anexo.

Gráfico 16. Distribución del grado de entrada de los nodos del *Cluster 2*



En la Figura 84 se muestra una representación gráfica del subgrafo correspondiente al *Cluster 2*, de forma que el tamaño de sus nodos es proporcional al grado de entrada de los mismos.

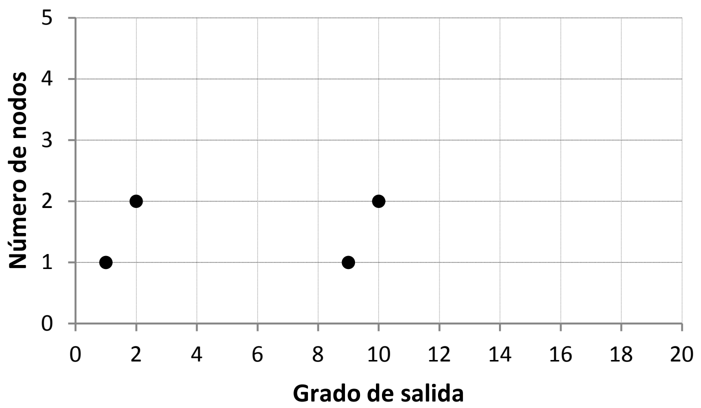
Figura 84. Representación gráfica del *Cluster 2* según el grado de entrada de sus nodos



Los mayores grados de entrada de este cluster se tienen para los contenidos *Error relativo*, *Error Absoluto*, *Cota inferior* y *Cota superior*, con valores 5, 4, 4 y 4 respectivamente. Estos datos se traducen en que estos cuatro contenidos poseen 5, 4, 4 y 4 contenidos prerrequisito, respectivamente, entre los contenidos del *Cluster 2*.

Respecto al grado de salida, los valores oscilan entre 0 y 10, y el 50% de los nodos de este cluster poseen grado de salida 0. Esto se interpreta como que la mitad de los contenidos de este cluster no son prerrequisito de ningún otro contenido de este cluster. La distribución exacta de los mismos puede verse en el Gráfico 17.

Gráfico 17. Distribución del grado de salida de los nodos del *Cluster 2*



En la representación gráfica de la Figura 85 puede observarse como existen tres nodos con mucho mayor grado de salida que el resto. Los contenidos correspondientes a estos tres nodos son *Aproximación por exceso de un número decimal*, *Aproximación por defecto de un número decimal* y *Aproximación de un número decimal*, con valores 10, 10 y 9 respectivamente. Esta información se traduce en que estos tres contenidos son prerrequisito para otros 10, 10 y 9 contenidos del *Cluster 2* respectivamente. En la Figura 86 se muestra una representación gráfica de este cluster, donde pueden observarse los arcos con nodo origen el contenido *Aproximación de un número decimal*.

Figura 85. Representación gráfica del *Cluster 2* según el grado de salida de sus nodos

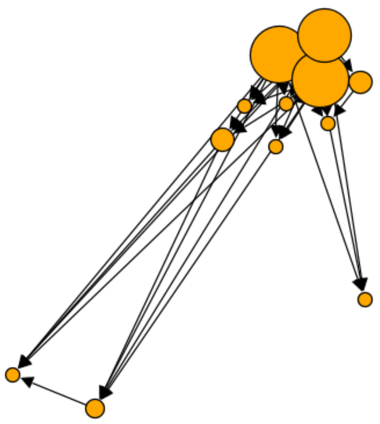
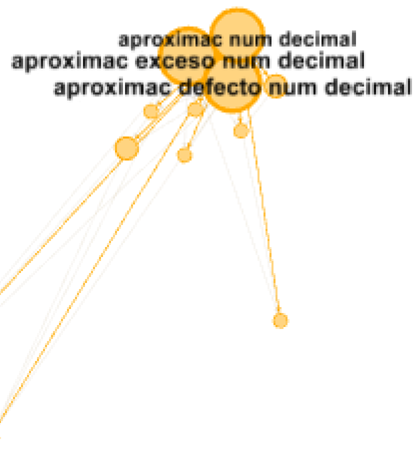


Figura 86. Arcos en el *Cluster 2* con nodo origen el contenido *Aproximación de un número decimal*



Cluster 3

Los grados de entrada de los nodos de este cluster, de grado medio 14.2, oscilan entre los valores 0 y 54. El grado de entrada con mayor frecuencia es 1, con 13 nodos con ese grado, lo que supone el 8.8% de los nodos del cluster.

El 7.4% de los nodos del cluster posee grado de entrada superior a 46. Esto supone un total de 11 contenidos relativos a la representación gráfica de funciones, concretamente: *Representación gráfica de una función logarítmica*, *Representación gráfica de una función exponencial*, *Representación gráfica de una función radical*, *Representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa*, *Representación gráfica de la función valor absoluto*, *Representación gráfica de una función trigonométrica*, *Representación gráfica de una función lineal*, *Representación gráfica de una función cuadrática*, *Representación gráfica de una función polinómica*, *Representación gráfica de una función racional* y *Representación gráfica de una función* con valores de grado de salida 54, 53, 52, 50, 50, 49, 48, 48, 48, 48 y 47 respectivamente. Ello se interpreta como que cada uno de estos contenidos posee exactamente esa cantidad de prerrequisitos dentro del *Cluster 3*.

En el Gráfico 18 puede verse la distribución exacta de los grados de entrada de los nodos de este cluster y en la Figura 87 una representación gráfica del subgrafo correspondiente, en la que el tamaño de sus nodos es proporcional a su grado de entrada.

Gráfico 18. Distribución del grado de entrada de los nodos del *Cluster 3*

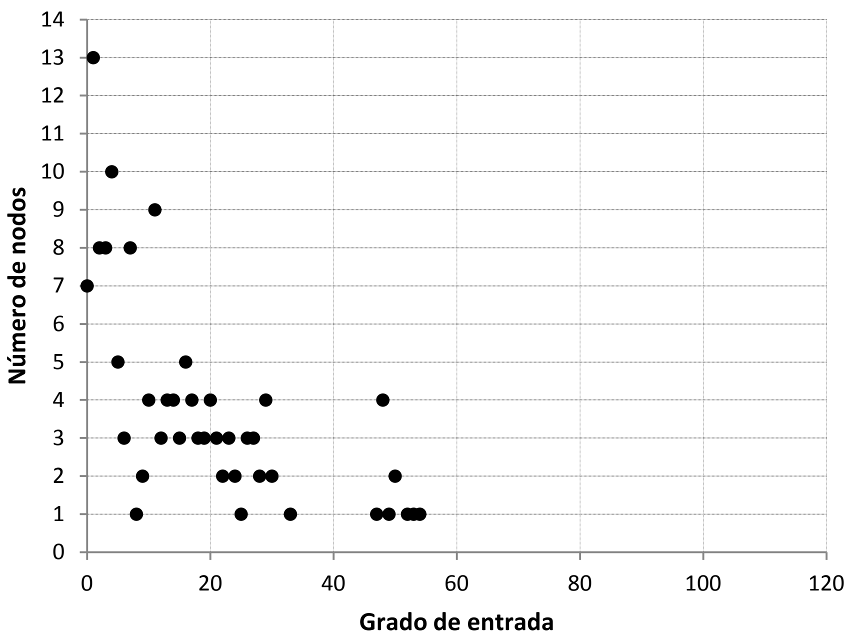
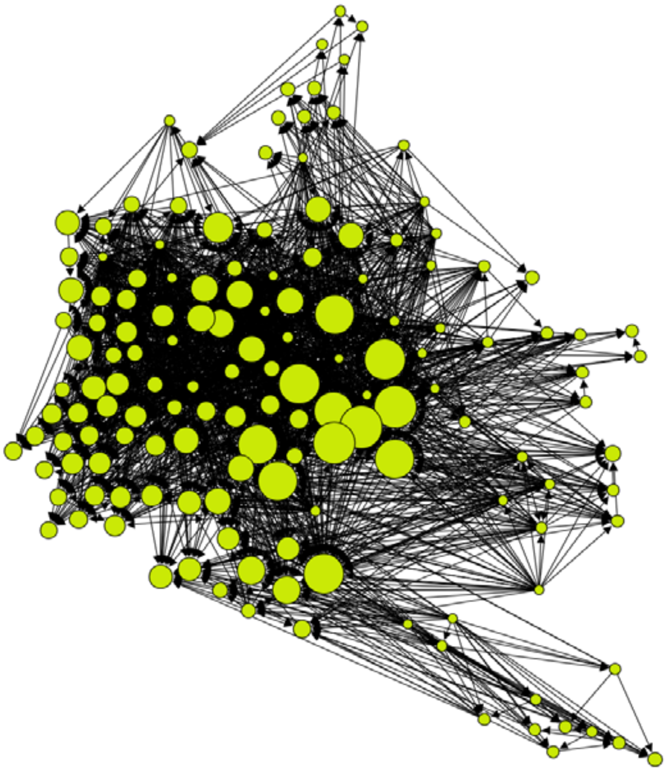


Figura 87. Representación gráfica del *Cluster 3* según el grado de entrada de sus nodos



En el *Cluster 3* el grado de salida toma valores entre 0 y 107. Cabe destacar que posee un 11.5% de nodos con grado de salida 1 y un 31.8% de nodos con grado de salida 0. Existen en este cluster 10 contenidos con grado de salida mayor o igual que 80. Estos corresponden a: *Números decimales*, *Números decimales periódicos, Fracciones de números enteros*, *Numerador de una fracción de números enteros*, *Denominador de una fracción de números enteros*, *Números decimales exactos*, *Fracciones equivalentes de números enteros*, *Números racionales*, *Números irracionales* y *Números reales*, con valores 107, 87, 86, 83, 83, 83, 82, 81, 81 y 80 respectivamente. Estos datos reflejan la importancia de estos contenidos para el aprendizaje de otros muchos contenidos pertenecientes a este cluster.

En el Gráfico 19 se muestra la distribución de los grados de salida en este cluster. En la Figura 88 puede verse una representación gráfica del cluster en la que el tamaño de los nodos es proporcional a su grado de salida. La correspondencia entre algunos de los nodos y los contenidos que representan, así como los arcos con nodo origen el contenido *Números decimales*, pueden verse en la Figura 89. Téngase en cuenta que pueden consultarse los datos detallados de todos los nodos de este cluster en la Tabla 42 del Anexo.

Gráfico 19. Distribución del grado de salida de los nodos del *Cluster 3*

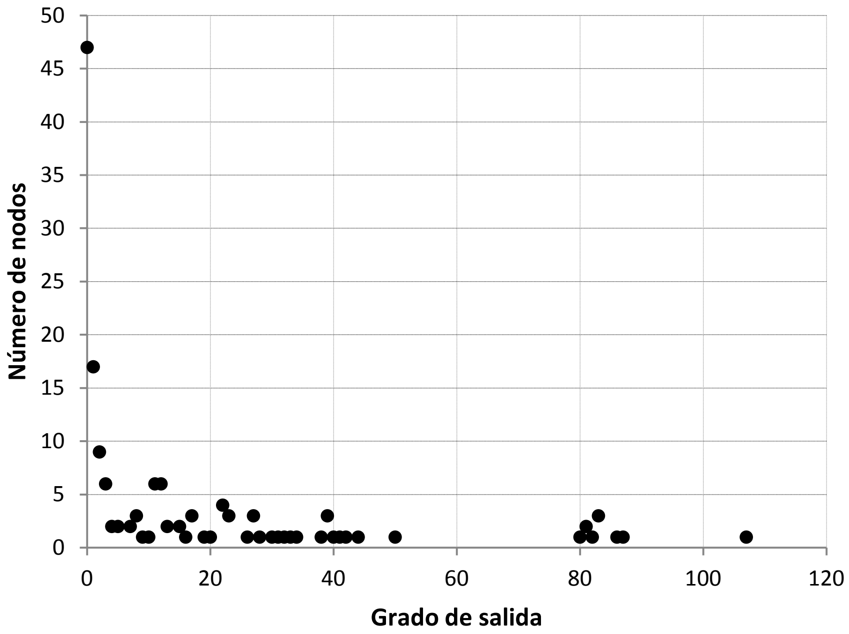


Figura 88. Representación gráfica del *Cluster 3* según el grado de salida de sus nodos

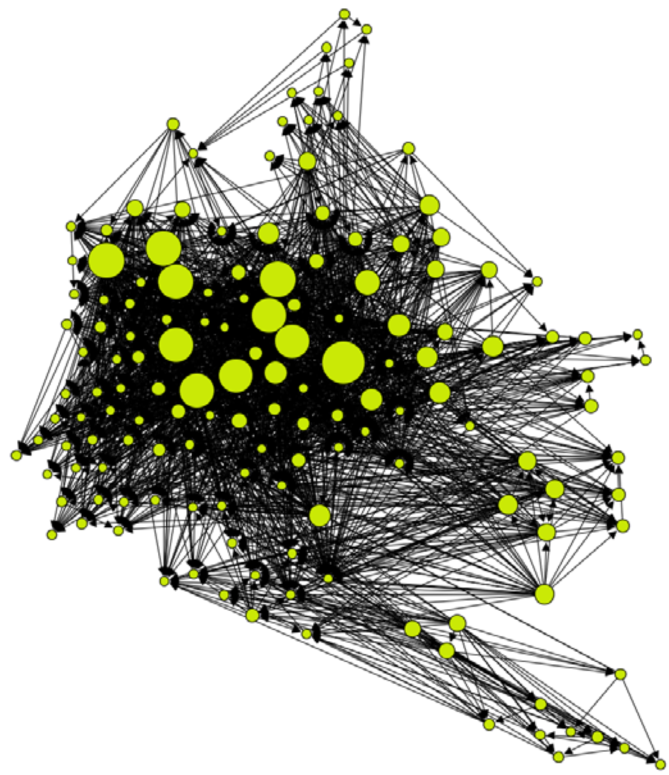
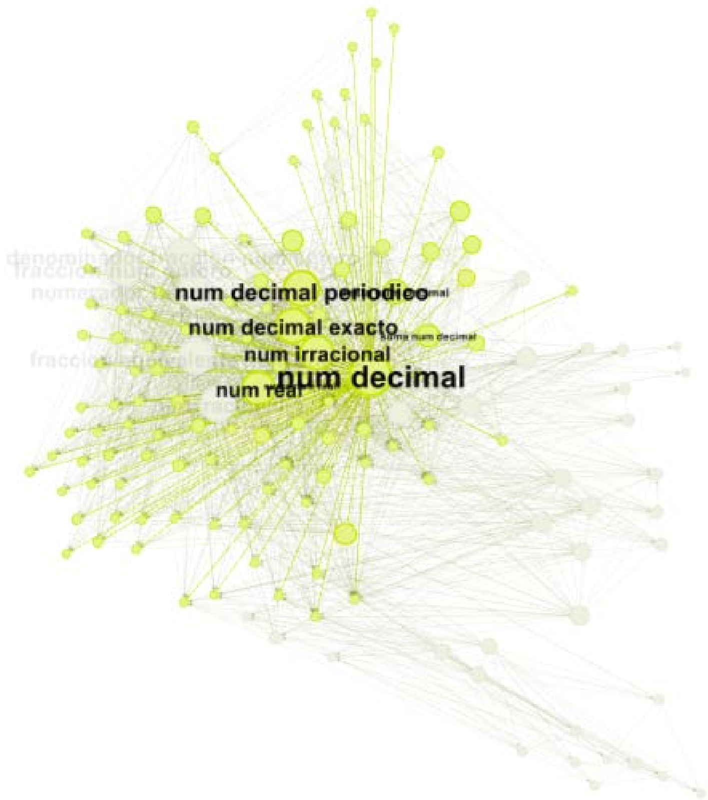


Figura 89. Arcos en el *Cluster 3* con nodo origen el contenido *Números decimales*



Cluster 4

Los grados de entrada de los nodos del *Cluster 4*, de grado medio 10.5, oscilan entre 0 y 37. Los 8 contenidos con mayor grado de entrada corresponden a los contenidos de *Cálculo del área de una pirámide regular*, *Cálculo del área de un tronco de cono*, *Cálculo del área de un cono*, *Cálculo del volumen de un cono*, *Cálculo de área de un tronco de pirámide*, *Cálculo del volumen de un tronco de pirámide*, *Cálculo del volumen de un cilindro* y *Cálculo del área de un cilindro* con valores 37, 34, 33, 33, 32, 29, 28 y 27 respectivamente.

La distribución exacta de los mismos se muestra en el Gráfico 20. Puede verse también en la Figura 90 una representación gráfica del *Cluster 4*, donde el tamaño de los nodos es proporcional al grado de entrada de los mismos.

Gráfico 20. Distribución del grado de entrada de los nodos del *Cluster 4*

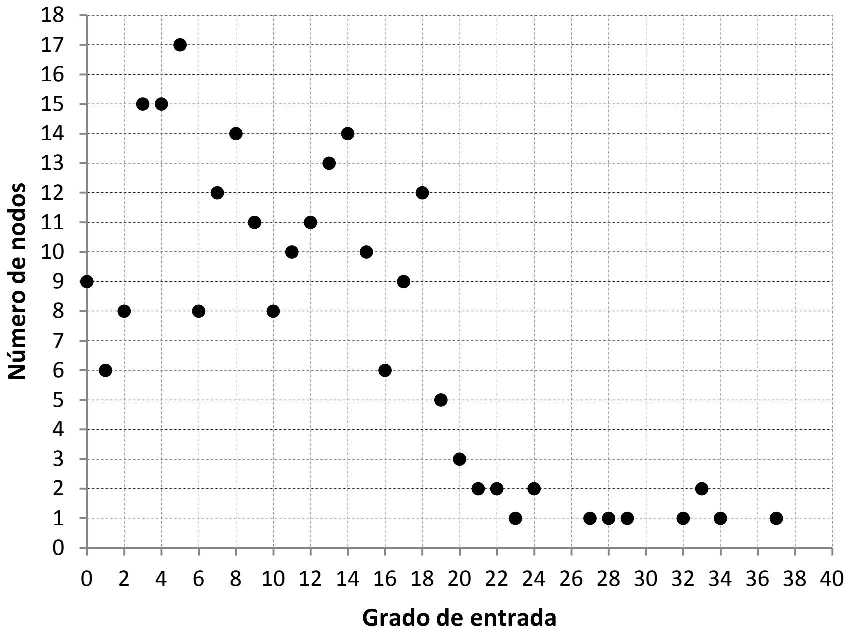
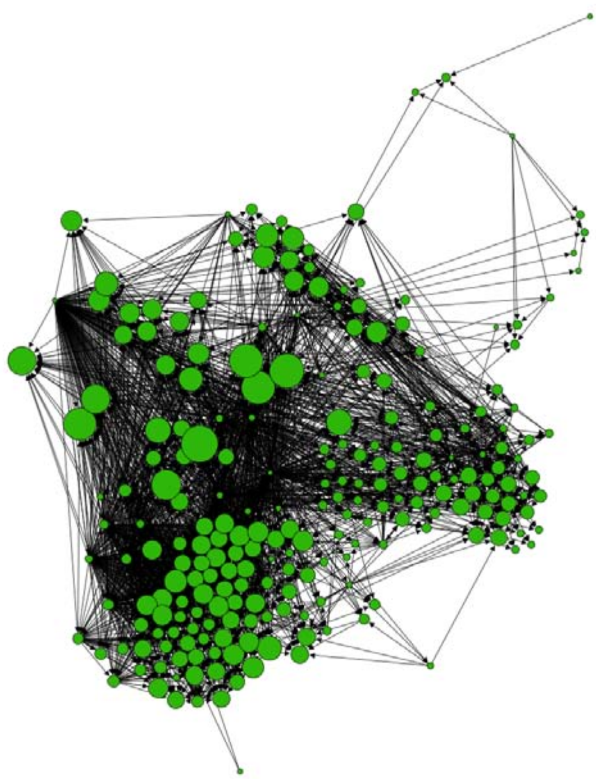


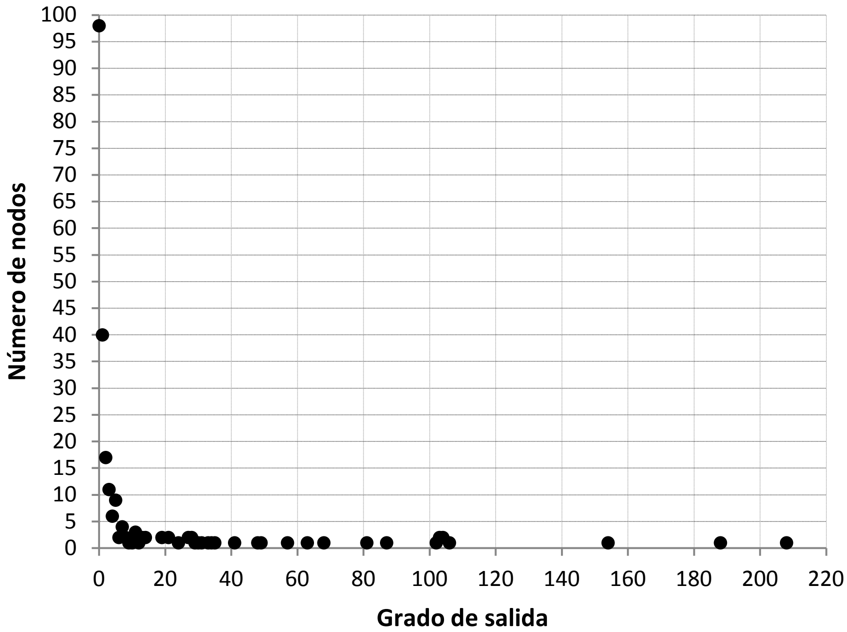
Figura 90. Representación gráfica del *Cluster 4* según el grado de entrada de sus nodos



Los grados de salida de los nodos del *Cluster 4* varían entre 0 y 208. Un total de 191 nodos de los 231, esto es un 82.7%, poseen grado de salida menor o igual a 10. Por otro lado, 9 son los contenidos con grado de salida superior a 100, lo que fundamenta la importancia de esos contenidos para el resto de contenidos del cluster. Estos contenidos son los relativos a *Punto*, *Recta*, *Segmento*, *Extremos de un segmento*, *Segmentos consecutivos*, *Semirrecta*, *Línea poligonal*, *Ángulo* y *Polígono*, con valores 208, 188, 154, 106, 104, 104, 103, 103 y 102, respectivamente.

La distribución completa de los grados de salida en este cluster puede verse en el Gráfico 21.

Gráfico 21. Distribución del grado de salida de los nodos del *Cluster 4*



En la Figura 91 se muestra la representación gráfica relativa al *Cluster 4*, en la que el tamaño de los nodos es proporcional a su grado de salida. En la Figura 92 pueden observarse los arcos salientes del contenido con mayor número de grado de salida. Téngase en cuenta que los datos detallados de la distribución del grado de los nodos del *Cluster 4* pueden verse en la Tabla 43 del Anexo.

Figura 91. Representación gráfica del *Cluster 4* según el grado de salida de sus nodos

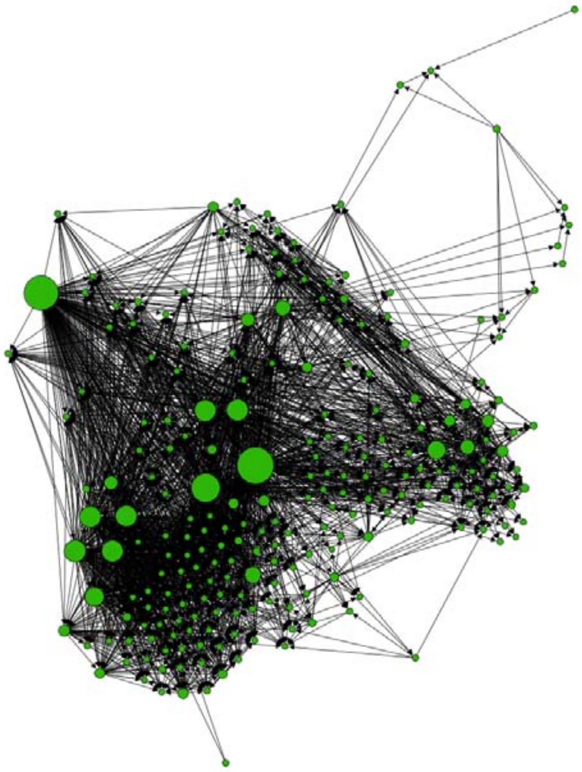
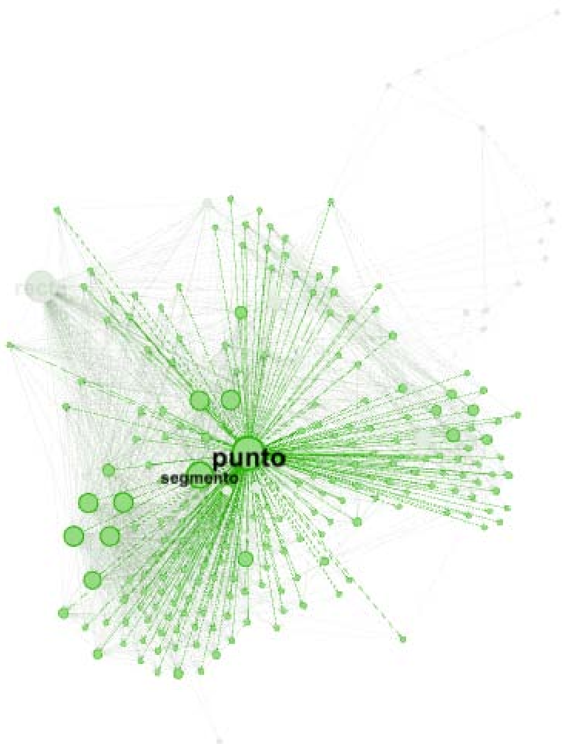


Figura 92. Arcos en el *Cluster 4* con nodo origen el contenido *Punto*



Este análisis pormenorizado tanto del grado de entrada como de salida de los nodos correspondientes a cada uno de los cinco clusters identificados en el grafo de estudio, ha desvelado información muy interesante a nivel de cluster.

Así, de entre los contenidos con cierta complejidad en el proceso de aprendizaje, en el sentido de que precisan de otros muchos contenidos de su mismo cluster para su comprensión, destacan:

- *Cluster 0*: *Correlación negativa*, *Correlación positiva* y *Recta de regresión*.
- *Cluster 1*: *Resolución de ecuaciones de fracciones algebraicas*.
- *Cluster 2*: *Error relativo*, *Error Absoluto*, *Cota inferior* y *Cota superior.*
- *Cluster 3*: *Representación gráfica de una función logarítmica*, *Representación gráfica de una función exponencial*, *Representación gráfica de una función radical*, *Representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa*, *Representación gráfica de la función valor absoluto*, *Representación gráfica de una función trigonométrica*, *Representación gráfica de una función lineal*, *Representación gráfica de una función cuadrática*, *Representación gráfica de una función polinómica*, *Representación gráfica de una función racional* y *Representación gráfica de una función*.
- *Cluster 4*: *Cálculo del área de una pirámide regular*, *Cálculo del área de un tronco de cono*, *Cálculo del área de un cono*, *Cálculo del volumen de un cono*, *Cálculo de área de un tronco de pirámide*, *Cálculo del volumen de un tronco de pirámide*, *Cálculo del volumen de un cilindro* y *Cálculo del área de un cilindro*.

Mientras que de entre los contenidos que podrían considerarse de mucha importancia para el cluster al que pertenecen, debido a que son prerrequisito para otros muchos contenidos de su mismo cluster, destacan:

- *Cluster 0: Sistema de numeración decimal, Números naturales, Suma de números naturales, Resta de números naturales, Multiplicación de números naturales y División de números naturales.*
- *Cluster 1: Números enteros, Representación sobre la recta numérica de números naturales, Representación sobre la recta numérica de números enteros, Valor absoluto de un número entero, Factor de un número entero y Multiplicación de números enteros.*

- *Cluster 2: Aproximación por exceso de un número decimal, Aproximación por defecto de un número decimal y Aproximación de un número decimal.*

- *Cluster 3: Números decimales, Números decimales periódicos, Fracciones de números enteros, Numerador de una fracción de números enteros, Denominador de una fracción de números enteros, Números decimales exactos, Fracciones equivalentes de números enteros, Números racionales, Números irracionales y Números reales.*

- *Cluster 4: Punto, Recta, Segmento, Extremos de un segmento, Segmentos consecutivos, Semirrecta, Línea poligonal, Ángulo y Polígono.*

Análisis de grado en el grafo de estudio

Una vez analizados aspectos relativos a los grados de los contenidos de los diferentes clusters, es de gran interés continuar con diferentes análisis del grafo de estudio de tipo global, esto es, considerando todos los nodos que constituyen el grafo elaborado en esta investigación.

El análisis pormenorizado realizado en relación al grado de los nodos de cada uno de los clusters identificados en el grafo de estudio, ha desvelado ya gran parte de la información, ya que se han descubierto, para cada uno de los cinco clusters, aquellos contenidos que precisan de un gran número de otros para comprenderse, y aquellos contenidos necesarios para un elevado número de contenidos. Sin embargo, el conocer en qué medida esos contenidos son claves desde esos dos puntos de vista, en la globalidad del grafo de estudio, es primordial.

Tras el cálculo del grado de entrada de cada uno de los 814 nodos que forman el grafo de estudio de grado medio 21.7, se obtiene que este parámetro oscila entre 0 y 88. El hecho de que los grados de entrada más altos encontrados para el *Cluster 0*, *Cluster 1*, *Cluster 2*, *Cluster 3* y *Cluster 4* hayan sido 22, 44, 5, 54 y 37 respectivamente, demuestra cuantitativamente (ya demostrado gráficamente) que los clusters identificados en el grafo de estudio no son grupos aislados, sino que existe entre ellos una considerable conectividad.

Tras la identificación de contenidos, se tiene que aquellos con mayor grado de entrada en los clusters se corresponden con los de mayores grados de entrada en el grafo de estudio, si bien los grados en este último, lógicamente, son aún mayores.

En la Tabla 35 pueden verse los contenidos con grado de entrada igual o superior a 70 junto con su valor exacto, además del valor de su grado de entrada en el cluster al que pertenecen, y la identificación de tal cluster. Los datos del resto de contenidos del grafo pueden consultarse en la Tabla 44 del Anexo.

Tabla 35. Contenidos con mayores grados de entrada

Contenido	Grado de entrada en el grafo de estudio	Grado de entrada en su cluster	Cluster
Representación gráfica de una función racional	88	48	3
Representación gráfica de una función polinómica	87	48	3
Representación gráfica de una función lineal	86	48	3
Representación gráfica de una función trigonométrica	85	49	3
Representación gráfica de una función radical	84	52	3
Representación gráfica de una función cuadrática	82	48	3
Representación gráfica de una función logarítmica	82	54	3
Representación gráfica de una función exponencial	81	53	3
Representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa	80	50	3
Coeficiente de correlación	79	33	3
Cálculo del área de un cilindro	76	27	4
Cálculo del área de un tronco de pirámide	75	32	4
Cálculo del volumen de un cilindro	73	28	4
Cálculo del área de un prisma regular	71	37	1
Representación gráfica de la función valor absoluto	70	50	3

Estos datos indican que esos contenidos no solo requieren de otros contenidos de los clusters a los que pertenecen, sino que requieren de muchos más contenidos presentes en otros clusters, lo que supone una demostración cuantitativa de la complejidad de cada contenido dentro del cluster al que pertenece y dentro de toda la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria en general.

En relación al grado de salida de los 814 nodos del grafo de estudio, se tiene que este valor varía en el intervalo [0,599]. El extremo superior de este intervalo es mucho mayor que los máximos de los grados de salida calculados para los cinco clusters, ya que estos corresponden a 191, 207, 10, 107 y 208 para el *Cluster 0*, *Cluster 1*, *Cluster 2*, *Cluster 3* y *Cluster 4*, respectivamente.

Los contenidos con grado de salida superior a 250 pueden verse en la Tabla 36, junto con el valor exacto de su grado de salida en el grafo de estudio y en el cluster al que pertenecen, además del identificador de tal cluster.

Tabla 36. Contenidos con mayores grados de salida

Contenido	Grado de salida en el grafo de estudio	Grado de salida en su cluster	Cluster
Recta	599	188	4
Sistema de numeración decimal	572	191	0
Números naturales	545	189	0
Suma de números naturales	537	186	0
Multiplicación de números naturales	491	167	0
Resta de números naturales	484	156	0
División de números naturales	436	137	0
Representación de un número natural	389	206	1
Números enteros	372	207	1
Representación de un número entero	368	205	1
Valor absoluto de un número entero	367	204	1
Punto	347	208	4
Factor de un número entero	342	197	1
Multiplicación de números enteros	341	196	1
División de números enteros	329	177	1
Segmento	270	154	4
Suma de números enteros	252	186	1

Con ello se demuestra no solo que los contenidos que son importantes en cada cluster también lo son a nivel de etapa, sino que se aporta un dato cuantitativo al respecto.

El análisis realizado relativo al grado de entrada y grado de salida de los diferentes contenidos, permite afirmar de nuevo la idoneidad de las agrupaciones de los contenidos matemáticos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en esos clusters establecidos mediante técnicas propias de teoría de grafos.

Se ha demostrado cuantitativamente que los contenidos con alto grado de entrada, esto es, los contenidos en cierto sentido complejos a nivel de cluster, también lo son a nivel de etapa, de la misma manera que los contenidos con alto grado de salida, esto es, los contenidos en cierto sentido importantes (para entender otros contenidos) a nivel de cluster, también lo son a nivel de etapa.

Además de estas relaciones, los datos demuestran también, de forma cuantitativa, la elevada interconexión existente entre los contenidos matemáticos de toda la etapa educativa. Sin duda, este tipo de demostración cuantitativa completa, considerablemente, el conocido dato cualitativo.

Por otro lado, un análisis de grado del grafo de estudio permite también la identificación de aquellos contenidos que pueden considerarse previos y finales de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Así, los contenidos previos, entendiéndose como tales los propios de cursos anteriores al primer curso de la etapa, se corresponden exactamente con los nodos fuente del grafo de estudio (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). Es decir, con aquellos contenidos que no requieren de ningún otro contenido del grafo de estudio para su comprensión. Estos contenidos suponen el 2.2% de los contenidos matemáticos considerados, y se corresponden exactamente con los nodos con grado de entrada nulo y grado de salida positivo, por lo que pueden identificarse con claridad en la Tabla 44 del Anexo.

En relación a los contenidos finales de la etapa, se tiene que estos se corresponden con los nodos sumidero del grafo de estudio (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). Es decir, con los contenidos que no son prerrequisito de ninguno de los contenidos que constituyen el grafo. Téngase en cuenta que estos contenidos, que suponen el 38.2% del conjunto total, ya fueron identificados como aquellos nodos del grafo de estudio para los que no existen caminos dirigidos en los que ellos son nodo origen (véase apartado 9.7. Preproceso del digrafo generador del grafo de estudio (II): clausura transitiva). Puesto que estos contenidos se corresponden entonces con los nodos con grado de salida nulo y grado de entrada positivo, pueden identificarse también fácilmente en la Tabla 44 del Anexo.

Con todo lo anterior y desde el punto de vista de la metodología empleada para la identificación de contenidos clave, tanto a nivel global de etapa como a nivel de agrupaciones más pequeñas de contenidos, se tiene que esta puede ser de gran utilidad en los procesos de planificación de la enseñanza. El hecho de conocer bajo el criterio aquí determinado qué contenidos pueden considerarse tanto de mayor importancia como de mayor complejidad, así como previos y finales, puede ayudar considerablemente en la selección de contenidos y su consecuente programación.

Además de ello, cabe mencionar que esta forma de identificación de contenidos clave mediante un análisis de grado en el grafo de estudio, se corresponde con un método de selección de contenidos que puede ser de gran interés, sin duda, para la determinación de lo que se conoce como epítome en la Teoría de la elaboración de Reigeluth, uno de los fundamentos teóricos base de esta investigación (véase apartado 3.4. Teoría de la elaboración de Reigeluth).

Téngase en cuenta además que, de la misma manera que esta metodología se ha aplicado al conocimiento matemático propio de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria, esta puede aplicarse tanto a cualquier otro área de conocimiento como a otros niveles educativos. Característica que, por otra parte, aumenta notablemente su utilidad con un amplio abanico de posibilidades.

10.4. Obtención de predecesores y sucesores en el grafo de estudio

Gracias al análisis de grado que se ha realizado de los distintos contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, se conoce para cada uno de los contenidos cuál es su grado exacto de entrada y de salida.

Debido a que el grafo de estudio es transitivo, todos aquellos contenidos que sean prerrequisito de uno dado, aunque sea por mediación de otros, se consideran también prerrequisitos inmediatos del contenido en cuestión, esto es, a distancia 1 en el grafo de estudio.

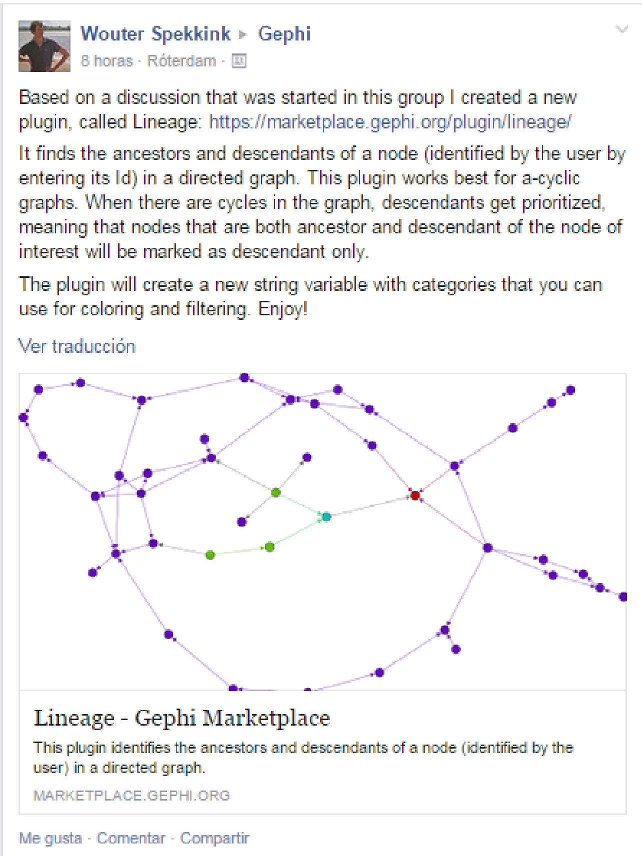
Es por ello por lo que el conocer el grado de entrada y grado de salida de un contenido, es conocer exactamente el número de contenidos prerrequisito que este posee, y el número de contenidos para los que este es prerrequisito, respectivamente.

Si, como ya se ha podido comprobar, el disponer de los datos de grado de entrada y salida de los contenidos de estudio, aporta una información de gran interés en relación a la conectividad del conjunto de nodos de la etapa, el poder completar estos datos con otros cualitativos sería, sin duda, aún más revelador.

Es por ello por lo que se estudia la posibilidad de identificar los contenidos que son prerrequisito de uno dado, esto es, el conjunto de predecesores del nodo que representa tal contenido. También se estudia la posibilidad de identificar los contenidos para los que el contenido en cuestión es prerrequisito, esto es el conjunto de sucesores del nodo correspondiente (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos).

Los dos paquetes de software de análisis de grafos utilizados en esta investigación, Gephi y Pajek, pueden llevar a cabo esta tarea. Respecto a Gephi, se cree conveniente destacar que, si bien hoy en día posee esta posibilidad, no ha sido así hasta hace muy poco tiempo. Fue en el pasado mes de abril del presente año, cuando gracias al grupo que el programa posee en Facebook (véase apartado 8.2. Software Gephi), y tras una larga e interesante conversación sobre la necesidad de tal función, una persona muy activa en dicho grupo, Wouter Spekkink[57], respondió a nuestra petición y desarrolló en Java un plugin llamado *Lineage* con tal finalidad (véase Figura 93).

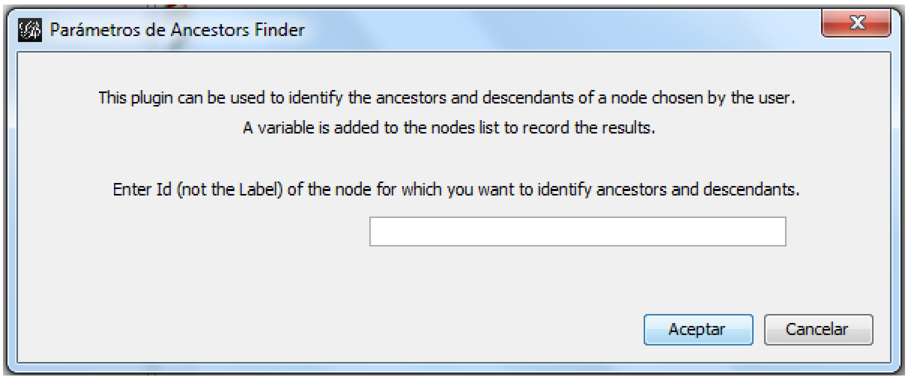
Figura 93. Publicación de la creación del plugin *Lineage* para Gephi



[57] http://www.wouterspekkink.org/

Con ello, dado el identificador numérico correspondiente al nodo en cuestión, puede conocerse el conjunto de sus predecesores y sucesores[58] (véase Figura 94).

Figura 94. Cuadro de diálogo del plugin *Lineage* de Gephi



En relación al software Pajek, este posee macros (véase aparatado 8.1. Software Pajek) que permiten la identificación de los predecesores y sucesores de un determinado nodo. Entre ellas destacan, la macro *3Bef3Lat*, que identifica los predecesores y sucesores hasta distancia 3 del nodo en cuestión, la macro *AllBef* o *Ancestors* que identifica los predecesores, y la macro *AllLat* o *Descendants*, que identifica los sucesores.

Así, con ambos paquetes de software puede conseguirse un listado tanto de los predecesores como de los sucesores de un determinado nodo. Por ejemplo, para el contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*, el listado obtenido de sus predecesores y sucesores puede verse en la Tabla 37.

Una vez identificados los contenidos se piensa en la posibilidad de un análisis visual que enriquezca en mayor medida la interpretación de los datos obtenidos.

La ejecución del plugin en Gephi que identifica los predecesores y sucesores de un nodo, incorpora, en el *laboratorio de datos* del programa, una serie de atributos a los contenidos del grafo, caracterizando si cada contenido es predecesor, sucesor o no está relacionado en ese sentido con el contenido en cuestión. A partir de ahí, la visualización del conjunto de predecesores

[58] Destacar que los nodos predecesores de uno dado también suelen denominarse ascendientes o antecesores. De la misma manera que los sucesores también se conocen como descendientes.

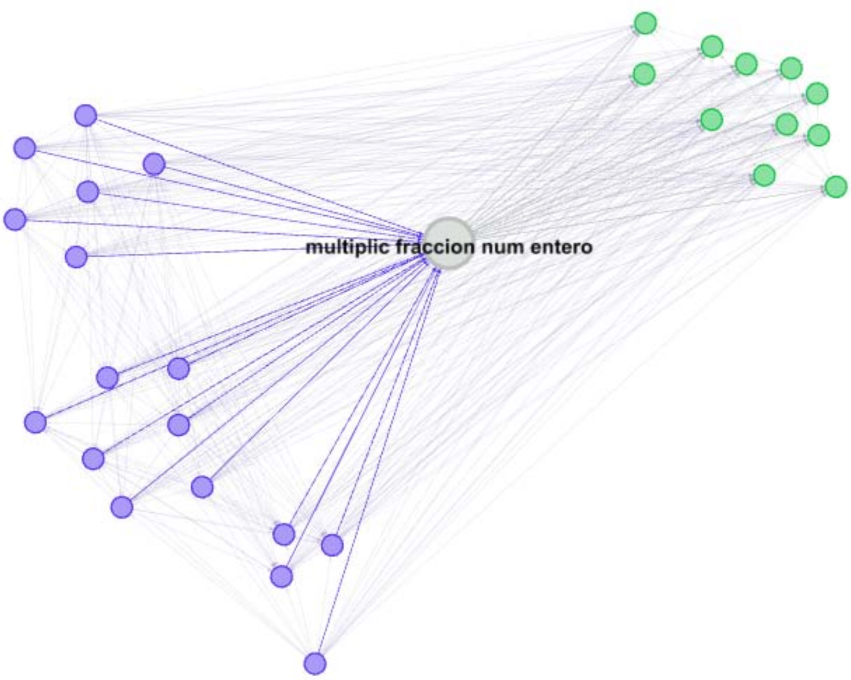
y/o sucesores puede realizarse mediante el uso de filtros propios del programa. En este caso puede conseguirse mediante filtros aplicados a los contenidos, teniendo en cuenta esa partición en predecesores, sucesores y no relacionados especificada como atributos de los contenidos.

Tabla 37. Listado de predecesores y sucesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*

Contenido	Predecesor-Sucesor
Sistema de numeración decimal	Predecesor
Números naturales	Predecesor
Suma de números naturales	Predecesor
Resta de números naturales	Predecesor
Multiplicación de números naturales	Predecesor
División de números naturales	Predecesor
Recta	Predecesor
Representación de un número natural	Predecesor
Números enteros	Predecesor
Representación de un número entero	Predecesor
Valor absoluto de un número entero	Predecesor
Factor de un número entero	Predecesor
Multiplicación de números enteros	Predecesor
División de números enteros	Predecesor
Fracción de números enteros	Predecesor
Numerador de una fracción de números enteros	Predecesor
Denominador de una fracción de números enteros	Predecesor
Fracción inversa de números enteros	Sucesor
Potencia de fracciones de números enteros	Sucesor
Multiplicación de potencias de fracciones de números enteros	Sucesor
División de fracciones de números enteros	Sucesor
División de potencias de fracciones de números enteros	Sucesor
Base de la potencia de una fracción de números enteros	Sucesor
Exponente de la potencia de una fracción de números enteros	Sucesor
Potencia de una multiplicación de fracciones de números enteros	Sucesor
Operaciones combinadas de fracciones de números enteros	Sucesor
Potencia de potencia de una fracción de números enteros	Sucesor
Potencia de una división de fracciones de números enteros	Sucesor

En la Figura 95 puede observarse una representación gráfica tanto del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros* (en el centro, de mayor tamaño y color gris), como del conjunto de predecesores (a la izquierda con nodos de color azul) y del conjunto de sucesores (a la derecha con nodos de color verde), así como los arcos entre ellos.

Figura 95. Representación gráfica de los predecesores y sucesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*



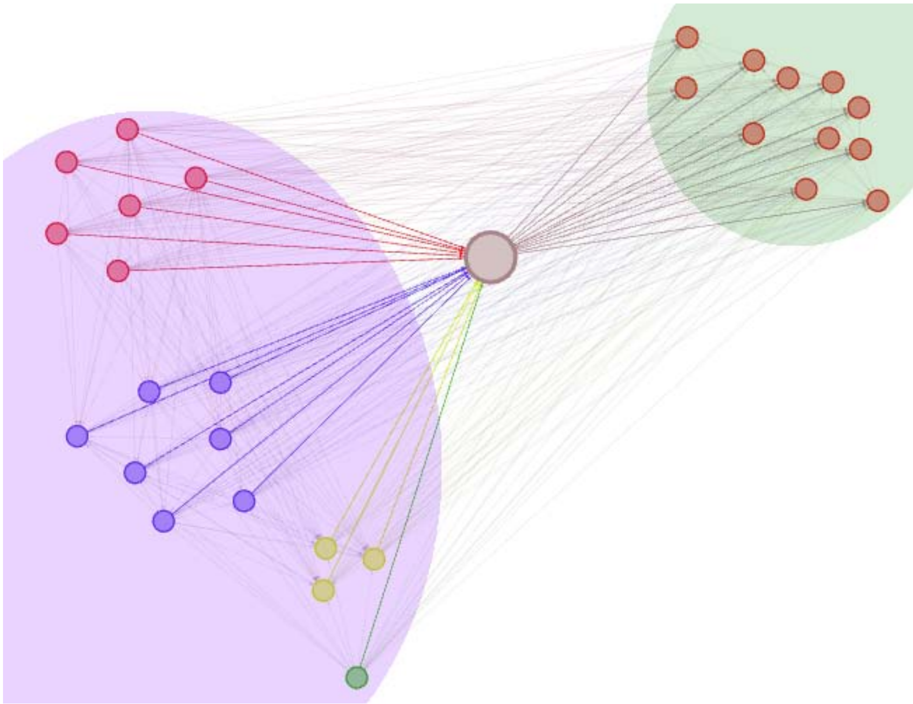
Es importante destacar que al haber realizado un análisis tanto a nivel global de etapa educativa, como a nivel de clusters, es posible identificar, dentro del conjunto de predecesores y sucesores de un contenido, el cluster al que pertenece cada uno de ellos. Esta posibilidad, completa, sin duda, a un gran nivel de detalle, el estudio de los conjuntos de predecesores y sucesores de un contenido determinado. Esta información relativa al contenido de *Multiplicación de fracciones de números enteros* puede verse en la Tabla 38.

Tabla 38. Listado de predecesores y sucesores identificados por cluster del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*

Contenido	Predecesor-Sucesor	Cluster
Sistema de numeración decimal	Predecesor	0
Números naturales	Predecesor	0
Suma de números naturales	Predecesor	0
Resta de números naturales	Predecesor	0
Multiplicación de números naturales	Predecesor	0
División de números naturales	Predecesor	0
Recta	Predecesor	4
Representación de un número natural	Predecesor	1
Números enteros	Predecesor	1
Representación de un número entero	Predecesor	1
Valor absoluto de un número entero	Predecesor	1
Factor de un número entero	Predecesor	1
Multiplicación de números enteros	Predecesor	1
División de números enteros	Predecesor	1
Fracción de números enteros	Predecesor	3
Numerador de una fracción de números enteros	Predecesor	3
Denominador de una fracción de números enteros	Predecesor	3
Fracción inversa de números enteros	Sucesor	0
Potencia de fracciones de números enteros	Sucesor	0
Multiplicación de potencias de fracciones de números enteros	Sucesor	0
División de fracciones de números enteros	Sucesor	0
División de potencias de fracciones de números enteros	Sucesor	0
Base de la potencia de una fracción de números enteros	Sucesor	0
Exponente de la potencia de una fracción de números enteros	Sucesor	0
Potencia de una multiplicación de fracciones de números enteros	Sucesor	0
Operaciones combinadas de fracciones de números enteros	Sucesor	0
Potencia de potencia de una fracción de números enteros	Sucesor	0
Potencia de una división de fracciones de números enteros	Sucesor	0

Una representación gráfica de los predecesores y sucesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*, se muestra en la Figura 96. Tanto en el grupo de predecesores, situado a la izquierda, como en el de sucesores, situado a la derecha, puede identificarse por colores el cluster al que pertenece cada contenido. Recuérdese que el color rojo corresponde al *Cluster 0*, el color azul al *Cluster 1*, el naranja al *Cluster 2*, el amarillo al *Cluster 3* y el verde al *Cluster 4*.

Figura 96. Representación gráfica de predecesores y sucesores identificados por cluster del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*

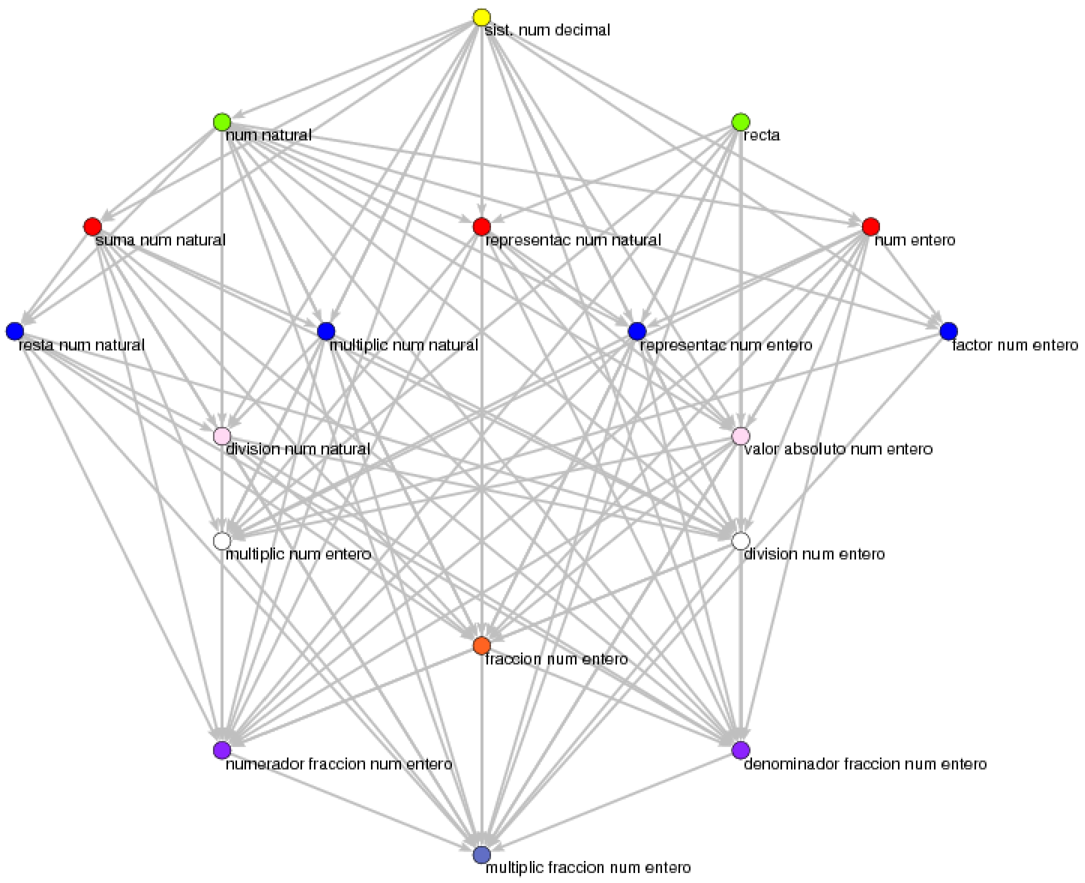


Además de lo anterior, y como demostración de que el análisis visual en teoría de grafos es una potente metodología, cabe mencionar que aún es posible profundizar en mayor medida en este sentido.

Así, el software Pajek, además de identificar y representar los conjuntos de predecesores y sucesores de un determinado contenido, especifica estos por niveles. Una interesante representación gráfica del conjunto de predecesores (véase Figura 97) y del conjunto de sucesores (véase Figura 98) del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*, permite un análisis visual aún más profundo.

Obsérvese como los diferentes predecesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*, se encuentran distribuidos en una disposición jerárquica. Si se analiza la representación sobre unos ejes cartesianos de forma que el contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros* se sitúe en el origen de coordenadas, pueden observarse diferentes grupos de nodos identificados por estar situados en una misma ordenada.

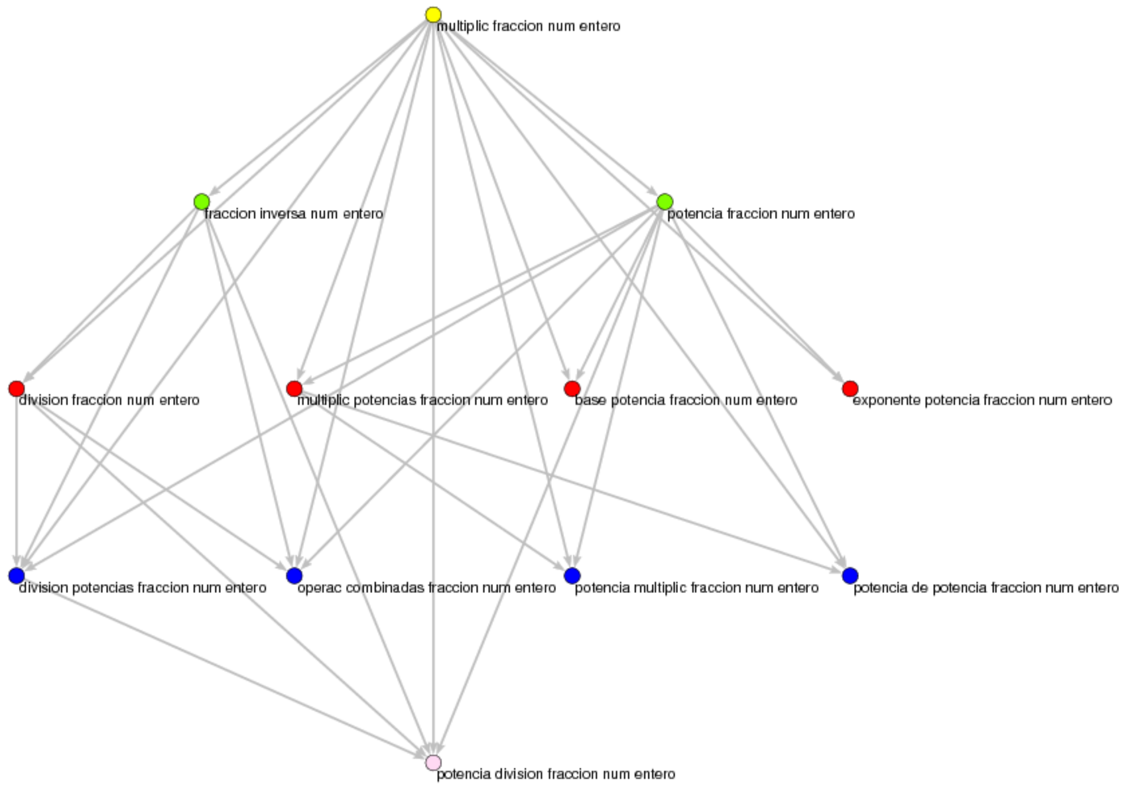
Figura 97. Representación gráfica por niveles de predecesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*



Así, si se denomina *Nivel 0* al formado por *Multiplicación de fracciones de números enteros*, *Nivel 1* al conjunto formado por los nodos situados en una ordenada inmediatamente superior, y así sucesivamente, hasta el *Nivel 8*, se tiene que dentro de los predecesores del contenido objeto de estudio, los predecesores de sus predecesores se encuentran siempre en niveles superiores al que estos pertenecen, como era de esperar.

De forma similar, se distribuyen los sucesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros* (véase Figura 98). Así, si se analiza la representación sobre unos ejes cartesianos con *Multiplicación de fracciones de números enteros* en el origen, denominándose este *Nivel 0*, el conjunto de sus sucesores se distribuye en ordenadas consecutivas negativas hasta el *Nivel -4*, de forma que los sucesores de sus sucesores se encuentran siempre en niveles inferiores a los que estos pertenecen.

Figura 98. Representación gráfica por niveles de sucesores del contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*



Es preciso tener en cuenta que este estudio del conjunto de predecesores y del conjunto de sucesores de un contenido, ejemplificado en este caso para el contenido *Multiplicación de fracciones de números enteros*, puede realizarse para cualquiera de los contenidos que forman el grafo de estudio, permitiendo, de esta manera, un análisis mucho más detallado de los contenidos relacionados por requerimiento con el contenido en cuestión.

En el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos, esta posibilidad de análisis ofrece muchas ventajas, ya que al conocer con exactitud no solamente quiénes son esos contenidos que se necesitan y para que contenidos son necesarios, sino también cómo se relacionan entre sí sus contenidos predecesores y sus contenidos sucesores, se obtienen datos de interés para poder llevar a cabo una muy buena planificación del orden de presentación de los diferentes contenidos objetos de estudio.

Por otro lado, ambos tipos de disposición jerárquica de contenidos se encuentran relacionados muy directamente con las formas de organización propuestas por la fundamentación teórica de esta investigación (véase Capítulo 3. Fundamentación teórica en el contexto del estudio).

Así, la disposición en niveles de predecesores de un contenido se asemeja a la organización jerárquica ascendente propuesta por Gagnè. De esta forma, aunque la teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè no atienda exactamente al mismo tipo de contenido que esta investigación, ambas coinciden en la forma de estructuración de los mismos.

Asimismo, la forma de organización jerárquica descendente de contenidos defendida por Ausubel, tiene un punto de encuentro en la disposición por niveles de sucesores de un contenido desarrollada en esta investigación. En este caso, el punto de encuentro es aún mayor, ya que además de coincidir en una tipología de contenido prácticamente conceptual, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel es, tal y como se ha demostrado, base fundamental de la tipología de estructuración de contenidos determinada en el presente estudio.

Además de ello, y como consecuencia directa de lo anterior, la posibilidad de disposición por niveles tanto de predecesores como de sucesores de un contenido, pone en práctica la propuesta de la teoría de la elaboración de Reigeluth respecto al ascenso y descenso alternado en la jerarquización de los contenidos objeto de enseñanza.

Por otra parte, esta disposición de contenidos permite también un análisis de contenidos acorde a su horizontalidad y verticalidad propuesta, entre otros, por Quesada (2001). Horizontal por su posible análisis entre diferentes conceptos dentro de un mismo nivel. Y vertical en el sentido de que se pueden analizar las relaciones entre conceptos pertenecientes a diferentes niveles. Este último tipo posibilita, también, de forma sencilla, el cálculo de la accesibilidad de un contenido desde otro en el grafo de estudio.

Es preciso destacar también que, atendiendo a la importancia que autores como Bruner (2003, 2004) otorgan al hecho de que los alumnos perciban la estructura que forman los contenidos que van a aprender, estas representaciones gráficas del conocimiento estructurado por niveles pueden ser de gran utilidad en este sentido. De esta manera, esta técnica en concreto de la metodología propuesta y aplicada en este estudio, podría asemejarse a otras técnicas propias de representación gráfica del conocimiento (véase Capítulo 4. Representación gráfica del conocimiento).

10.5. Identificación de caminos en el grafo de estudio

Si bien las distintas opciones analizadas hasta el momento en la presente investigación pueden proporcionar información novedosa y determinante en la toma de decisiones sobre, entre otros, la planificación educativa, aún caben nuevas posibilidades.

El análisis y la identificación de caminos dirigidos en el grafo de estudio es otra opción. Así, si se interpreta el nodo origen de un camino dirigido en el grafo, como un contenido previo, y el nodo destino, como un contenido objeto de aprendizaje, el análisis de las opciones existentes para los nodos interiores de ese tipo de caminos puede resultar de gran utilidad.

Téngase en cuenta que estos nodos interiores corresponden a sucesores del nodo origen y predecesores del nodo destino, por lo que, acorde a la relación de requerimiento establecida en esta investigación, estos nodos deben interpretarse como contenidos para los que el contenido previo es requisito y contenidos que son prerrequisito del contenido objeto de aprendizaje.

Uno de los análisis previos a la identificación de caminos en el grafo de estudio, es el análisis de de la conexión entre sus nodos. En este sentido, es claro que el grafo de estudio no posee nodos aislados, puesto que su conjunto de nodos ha sido determinado a partir de su conjunto de arcos.

Por otro lado, es preciso comprobar que el grafo de estudio es un grafo conexo. Aunque ello ya ha podido comprobarse mediante la representación gráfica del mismo, si se analiza esta propiedad con los paquetes de software Pajek y Gephi se tiene que, efectivamente, estos detectan una única componente conexa, y por tanto, el grafo de estudio se corresponde exactamente con un digrafo conexo (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). En la Figura 99 puede verse el informe al respecto emitido por Pajek.

Figura 99. Informe de análisis de conexión del grafo de estudio emitido por Pajek

```
-------------------------------------------------------
Number of components: 1
Size of the largest component: 814 vertices (100.000%)
-------------------------------------------------------
```

Una vez comprobado que el grafo de estudio es conexo, puede procederse entonces al análisis de caminos dirigidos en el grafo de extremos cualquier par de nodos del mismo.

En primer lugar, teniendo en cuenta la naturaleza del grafo de estudio, sería interesante analizar la existencia en este de caminos eulerianos o hamiltonianos dirigidos. Téngase en cuenta que debido a la no existencia en el mismo de circuitos, no es posible que el grafo sea un digrafo euleriano ni hamiltoniano (véase apartado 6.1. Terminología de teoría de grafos). Ni siquiera puede ser semieuleriano ni semihamiltoniano al ser conexo y existir más de un nodo de grado de salida cero.

Resulta también de interés el análisis de caminos entre dos contenidos cualesquiera. Una de las estructuras que permite este tipo de análisis es el subgrafo dirigido del grafo de estudio formado por los contenidos correspondientes al nodo origen y al nodo destino, y los contenidos que se corresponden con los nodos que son a la vez sucesores del nodo origen y predecesores del nodo destino.

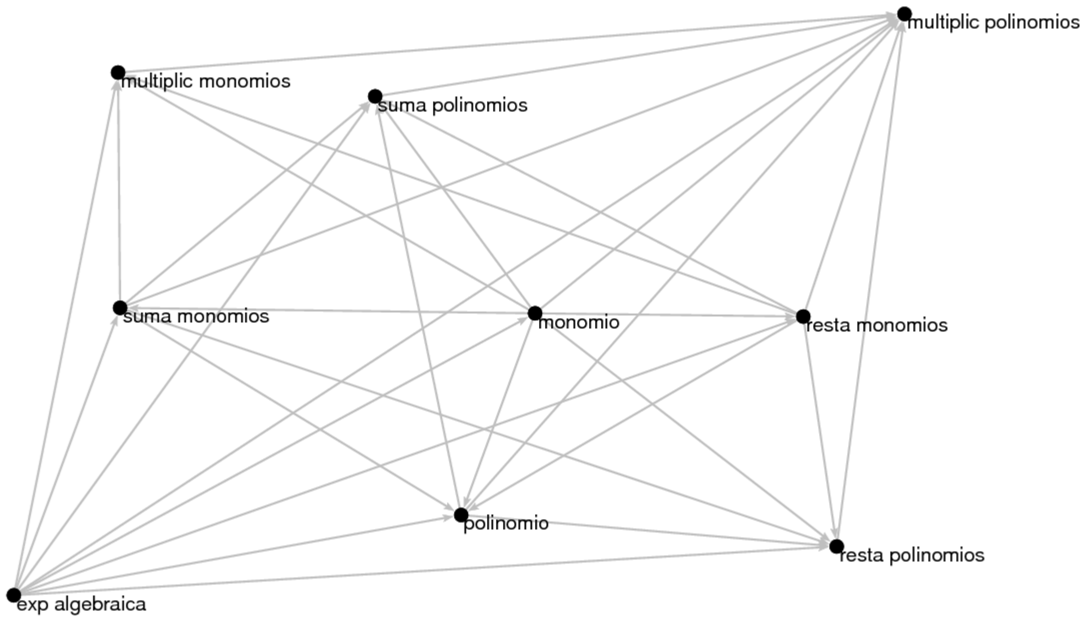
Frente a esta estructura, cabe un interesante estudio de las diferentes opciones de secuenciación para la planificación de la enseñanza de un contenido objeto de aprendizaje partiendo de un contenido previo, mediante la determinación de caminos hamiltonianos dirigidos y la elección de uno de ellos (algo que hace el profesor tradicionalmente).

Como ayuda para ello, el software Pajek ofrece la opción de determinación y representación gráfica de este subgrafo dirigido del grafo de estudio para cualquier par de contenidos. Por ejemplo, considerando como contenido previo *Expresión algebraica* y como contenido objeto de aprendizaje *Multiplicación de polinomios* se tiene, mediante el algoritmo de distribución de *Kamada-Kawai* (Kamada y Kawai, 1989) el subgrafo representado en la Figura 100.

Así, si el objetivo en este caso es el aprendizaje de la *Multiplicación de polinomios* y se tiene el conocimiento de lo que es una *Expresión algebraica*, el subgrafo dirigido determinado muestra los contenidos que se consideran necesarios para este proceso y los arcos entre ellos correspondientes a la relación de requerimiento establecida. De esta forma, con un análisis del mismo, pueden valorarse los diferentes caminos del nodo origen al nodo destino.

Sería interesante considerar el subgrafo asociado a la relación de requerimiento inmediata. Esta posibilidad es perfectamente viable, ya que, en términos de teoría de grafos, esto supone el cálculo de la reducción transitiva del subgrafo en cuestión.

Figura 100. Representación gráfica del subgrafo del grafo de estudio formado por los nodos sucesores del contenido *Expresión algebraica* y los nodos predecesores del contenido *Multiplicación de polinomios*



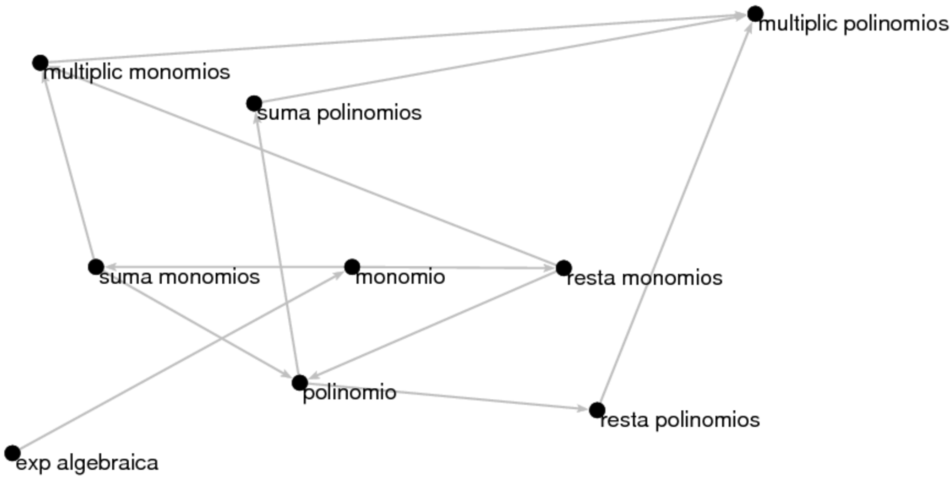
Para ello, se hace uso de la macro creada en Microsoft Excel, en la que se ha desarrollado un código en lenguaje de programación Visual Basic para Aplicaciones (VBA), que calcula la reducción transitiva de un grafo (véase apartado 6.5. Reducción transitiva de un grafo).

Al ejecutarse esta macro sobre el subgrafo de la Figura 100, de orden 9 y tamaño 31, se obtiene su reducción transitiva representada en la Figura 101, lógicamente del mismo orden y de tamaño 12.

De esta manera se tiene una estructura en la que se muestran los elementos de la relación de requerimiento inmediata establecida entre aquellos contenidos que son necesarios conocer, si se tiene como objetivo de aprendizaje el contenido *Multiplicación de polinomios* y como previo el contenido *Expresión algebraica*.

Con ello se facilita el proceso de secuenciación de contenidos que permite planificar, además, acorde a secuencias con 'eslabones' de amplitud todo lo reducida que se precise, característica que, tal y como afirma Gallegos (1998), favorece el aprendizaje significativo.

Figura 101. Representación gráfica de la reducción transitiva del subgrafo del grafo de estudio formado por los nodos sucesores del contenido *Expresión algebraica* y los nodos predecesores del contenido *Multiplicación de polinomios*



Este tipo de secuenciación didáctica, basada en una jerarquización de prerrequisitos inmediatos, encuentra su fundamento también en las jerarquías de aprendizaje significativo de Ausubel, y en las jerarquías gagnetianas, aplicadas a contenidos en lugar de a destrezas y habilidades, de forma que para poder enseñar un contenido, es preciso haber enseñado todos los contenidos que son prerrequisitos del mismo.

De hecho, la identificación de los elementos de la relación de requerimiento inmediato involucrados entre cualquier par de contenidos, contribuye en la determinación de lo que Ausubel denomina 'puentes' entre los conocimientos previos del alumno y los conocimientos que este necesita conocer. De esta manera se plantea solución a una de las necesidades que el propio Ausubel detecta, con el fin de que cada contenido sea soporte firme del nuevo aprendizaje y, con ello, tenga lugar el aprendizaje significativo.

Cabe destacar que la gran variedad de posibilidades de secuenciación existente en cada uno de los casos, puede favorecer, sin duda, la planificación de los procesos de enseñanza. Además, ello permite, dentro de las diferentes opciones considerar aquella que se crea más adecuada teniendo en cuenta otros factores tales como la diversidad del alumnado, el tiempo, los recursos disponibles, etc. Momento en el que además de las valoraciones epistemológicas es preciso contemplar las pedagógicas. Esta posibilidad, junto con su carácter dinámico, convierten el análisis de este tipo de subgrafos en una técnica metodológica de secuenciación de contenidos eficaz y novedosa.

Así, esta técnica y todas las desarrolladas anteriormente, hacen que la metodología propuesta y aplicada en esta investigación pueda resultar, sin duda, de gran ayuda para la planificación de la enseñanza de, como ha podido comprobarse, cualquier ámbito del conocimiento. Además, debido a todas las características de diseño, elaboración y puesta en práctica de esta metodología, se ha comprobado como su base principal, la teoría de grafos, puede contribuir con éxito al enriquecimiento de los procesos de selección, organización y secuenciación del conocimiento.

CONCLUSIONES

A continuación, acorde a los objetivos planteados para la presente investigación y tras el desarrollo de la misma, se exponen las conclusiones que se han obtenido. Cada una de ellas se acompaña de los comentarios que se consideran pertinentes para su contextualización e interpretación adecuada.

- Respecto a la normativa educativa y al concepto de currículo, se ha comprobado que este concepto ha sufrido variación a lo largo de las tres leyes orgánicas educativas -LOGSE, LOE y LOMCE- que han establecido las bases de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria desde su origen hasta la actualidad. Uno de los principales motivos de tal variación son las diferencias existentes también en las tres leyes orgánicas respecto a la noción de competencia. Así, si bien la LOGSE no dispone de un marco de competencias de forma explícita, aunque esto sí acontece en la LOE y la LOMCE, ambas no lo hacen desde un mismo punto de vista, dando cabida así, a competencias básicas por un lado y a competencias claves por otro. Sin embargo, a pesar de estas diferencias, se ha comprobado que estas tres leyes orgánicas comparten una misma forma de división del currículo en cuatro componentes generales: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

- En relación también con la normativa educativa de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, y concretamente respecto a los procesos de selección, organización y secuenciación de los contenidos que figuran en la misma, se han detectado una serie de aspectos en las tres leyes orgánicas. Por un lado, el proceso de selección de los contenidos se realiza en todas ellas mediante la determinación de aquellos que se consideran mínimos. Por otro lado, el proceso de organización de contenidos se lleva a cabo, aunque con un mismo fin, de formas ligeramente diferentes. Así, partiendo de la organización a nivel de etapa educativa, el nivel de ciclo no es detallado en la LOE, pero sí es considerado en la LOGSE y la LOMCE aunque con una estructuración diferente. Con ello, tras el nivel de curso y materia y en relación concretamente a la materia de Matemáticas, existen también diferencias respecto a su organización. Así, aunque las tres leyes orgánicas consideran subdivisiones de la misma, estas han ido variando de una a otra. Por otro lado, en la LOE es donde realmente aparece su denominación como bloque de contenido. Respecto al proceso de secuenciación de contenidos, se ha concluido que únicamente se determina en todas ellas hasta nivel de curso.

- Referente a los libros de texto, como fuentes de esta investigación, y concreciones curriculares del currículo de Matemáticas establecido en la normativa educativa de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, se han obtenido las siguientes conclusiones:

En relación a la selección de contenidos se tiene que los libros de texto la amplían en base a los contenidos mínimos establecidos por la normativa. Sin embargo, se ha comprobado como los libros de texto reproducen de forma casi literal la forma de organización de los contenidos que esta determina. Todo ello teniendo en cuenta, además, que es la propia normativa la que advierte el carácter orientativo de la agrupación que ella establece.

Sobre la organización de contenidos se ha obtenido que una de las aportaciones que ha hecho el libro de texto, como concreción curricular, ha sido la creación de un nivel más fino que el último nivel determinado por la normativa educativa, dando lugar así a lo que suele denominarse temas, unidades, unidades didácticas, etc. Sin embargo, esta forma de organización no deja de ser una subdivisión de la ya establecida por la normativa.

Con respecto a la secuenciación de contenidos, se ha comprobado que esta concreción curricular se realiza en función de las agrupaciones ya mencionadas, considerando además el mismo orden con el que figuran en la normativa de la que derivan. Todo ello, una vez más, a pesar de la advertencia de la propia normativa respecto al carácter orientativo de lo dispuesto. Esto ha supuesto, en la práctica, una secuenciación de contenidos que imita en gran medida el orden de aparición de los contenidos en los libros de texto y, en consecuencia, ha conducido a prácticamente una única forma de secuenciación.

Como consecuencia de lo anterior, se ha concluido que la verdadera función del libro de texto como concreción respecto a la normativa de la que derivan es, al menos, cuestionable. Todo ello a pesar de que los libros de texto han sido una de las concreciones curriculares de la normativa educativa más considerada a lo largo del tiempo, percibiéndose como representantes, portadores o traductores del currículo, con el principal propósito de actuar como nexos entre la normativa educativa y la práctica de aula (Ballesta, 1995; Lerma, 1995; Harris, 1997; Serrano, 2000).

Se ha concluido así que el libro de texto, como concreción curricular, limita la puesta en práctica de nuevas posibles formas de estructuración de contenidos. Si se tiene en cuenta que este ha sido el principal material curricular utilizado en las aulas (Serrano, 2000), se ha demostrado que, tal y como afirman Schubring (1987) y Goñi (2011), entre otros autores, el desarrollo del currículo normativo a uno más propositivo continua siendo, hoy en día, una tarea pendiente.

En relación a lo establecido por la normativa educativa de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria respecto a los libros de texto, se ha concluido que las referencias a los mismos han ido en continuo decremento en las sucesivas leyes orgánicas educativas relativas a esta etapa. En el origen de esta etapa, la normativa los contemplaba como materiales didácticos y regulaba su uso, mientras que, en la actualidad, únicamente establece unas pequeñas indicaciones en el contexto de la enseñanza de una materia en concreto. Este hecho, conlleva, en consecuencia, a un replanteamiento de nuevas formas de actuación en relación al desarrollo de concreciones curriculares de esta normativa educativa.

Acerca del papel desempeñado por los libros de texto en esta investigación, se ha comprobado que, si bien estos se han empleado en ella como un medio y no como un fin en sí mismo, la propia metodología implica un análisis implícito de los mismos, hecho que, por otro lado, significa que esta puede ser utilizada para análisis explícitos de libros de texto u otros materiales didácticos.

- En relación a la fundamentación teórica en el contexto de esta investigación, se ha concluido que, con base en el aprendizaje significativo, las diferentes teorías consideradas, defienden, respecto a los procesos de estructuración de contenidos, unos principios en absoluta concordancia con los de la presente investigación, como son: la importancia del conocimiento de la estructura interna de la disciplina objeto de enseñanza, así como su análisis y respeto hacia la misma.

- En relación también a las diferentes teorías contempladas en este estudio, se ha concluido que, todas ellas hacen alusión, respecto a la estructuración de contenidos, a procesos de jerarquización, de forma que cada una de ellas defiende una determinada dirección en la misma. Así, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel se decanta por una jerarquización descendente, mientras que la teoría del aprendizaje acumulativo de Gagnè lo hace por una jerarquización ascendente. Por otro lado, la teoría instruccional y del aprendizaje en espiral de Bruner defiende una estructuración en espiral, mientras que la teoría de la elaboración de Reigeluth, se decanta por un ascenso y descenso alternado en la jerarquización.

- Como consecuencia de esta variedad existente en las formas de estructuración defendidas por las diferentes teorías, se ha optado, para este estudio, por una fundamentación ecléctica, en la que una combinación ordenada de todas ellas ha supuesto no solamente puntos de encuentro entre las mismas, sino una base sólida que fundamenta, de forma conjunta, y desde diversos puntos de vista, un mismo propósito de estructuración del conocimiento.

- Respecto a la falta de aportación de criterios específicos para la estructuración del conocimiento por parte de las teorías consideradas y, atendiendo a los principios que la fundamentación ecléctica contempla, se ha definido un preciso criterio epistemológico para el planteamiento de nuevas formas de estructuración del conocimiento en base a la estructura interna de la disciplina en cuestión y el respeto hacia la misma. Criterio que, además, prioriza el proceso de construcción del conocimiento y la asignación de significados.

- Referente a la falta de aplicación práctica que manifiestan las diferentes fundamentaciones teóricas consultadas sin entidad de teoría, y a pesar de que ellas establecen diversos criterios de estructuración del conocimiento, el criterio de estructuración definido en esta investigación, sí se ha llevado a la práctica, concretamente, para el conocimiento matemático propio de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria del sistema educativo español, dotando así, a este criterio, de un carácter práctico que complementa al meramente teórico.

- En relación expresamente con los procesos de secuenciación de contenidos, y en concordancia con la oposición generalizada por parte de la fundamentación teórica frente a una secuenciación lineal de los mismos, se ha concluido que el criterio de estructuración definido para esta investigación ha sido base para la creación de secuenciaciones lógicas de contenidos, en las que la fundamentación de unos en otros, ha supuesto una alternativa válida a la secuenciación meramente lineal.

- Respecto a la modelización de los contenidos y las relaciones entre ellos en base al criterio epistemológico definido, y una vez analizadas las diferentes posibilidades existentes de representación, se ha concluido que, tal y como afirma Lipschutz (1993) acorde a toda estructura no lineal, la estructura de grafo ha resultado ser idónea para la modelización de tal tipo de información.

- Referido también a la estructura de grafo y al propósito de considerar una representación gráfica de la estructura del conocimiento con la que se pueda llevar a cabo análisis de tipo visual, se ha obtenido que, si bien en un comienzo fueron los mapas conceptuales y las redes asociativas pathfinder quienes se aproximaron a tal propósito, tras un estudio pormenorizado de los mismos, ninguna de estas dos técnicas lo hizo en su totalidad, hecho que ratificó la elección de la estructura de grafo considerada.

- Respecto a las dos técnicas mencionadas de representación gráfica del conocimiento -mapas conceptuales y redes asociativas pathfinder- se ha concluido además que, aunque se han visto involucradas en algunos estudios relacionados con la presente investigación, estos rozan de forma muy tangencial el propósito de la misma, y en absoluto, ni la metodología empleada, ni su desarrollo.

- En relación a la consideración de la teoría de grafos como base fundamental de la metodología propuesta, se ha concluido que las técnicas propias de esta teoría han resultado ser de gran utilidad en el diseño, elaboración y análisis del grafo de estudio, respondiendo a los propósitos de selección, organización y secuenciación de los contenidos considerados. Además de ello, se ha concluido que la teoría de grafos se ha aplicado en el campo de la investigación en una gran diversidad de ámbitos en los que la información fuente de estudio admite una estructura en forma de red. Sin embargo, no se ha aplicado hasta el momento para un propósito como el aquí presentado, hecho que permite concluir, por otra parte, la relevancia de la aportación desarrollada en este estudio.

- De acuerdo a los propósitos de considerar una combinación de análisis gráficos y numéricos de la estructura del conocimiento, así como de llevar a cabo una aplicación práctica con una cantidad de información lo suficientemente amplia como para poder realizar análisis concluyentes, se ha llegado a la conclusión de que un tratamiento computacional ha sido la mejor opción. Tras una revisión de las opciones existentes, se ha optado por una combinación de dos paquetes de software: Pajek y Gephi. Por otra parte, del amplio abanico de posibilidades que existe al respecto, se deriva que este factor computacional supone un enriquecimiento de la metodología considerada en la presente investigación al existir así diferentes alternativas de aplicación derivadas de una misma idea.

- Acerca de los paquetes de software seleccionados, y en relación a su análisis gráfico, se ha considerado, tal y como afirma Freeman (2000), que la visualización juega un papel importante, ya que las propiedades gráficas de ambos programas, junto con sus posibilidades de interacción dinámica en tiempo real, han permitido llevar a cabo análisis visuales exploratorios complementarios de los numéricos, muy esclarecedores.

- Con respecto a la viabilidad de la aplicación de la propuesta metodológica, se ha comprobado que, tanto el diseño y la elaboración del grafo de estudio, como la combinación de técnicas propias de teoría de grafos y el uso de software especializado, han permitido operativizar tal metodología para el caso del conocimiento matemático correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria del sistema educativo español.

- En relación a los procesos de diseño y elaboración del grafo de estudio se ha concluido que:

La elección de un digrafo generador del grafo de estudio, y las diferentes técnicas de teoría de grafos aplicadas sobre el mismo, relativas a eliminación de arcos múltiples, cálculo de clausura transitiva y eliminación de circuitos, han permitido definir con exactitud la relación de requerimiento establecida en el conjunto de contenidos matemáticos considerado.

El uso de software para la elaboración del grafo de estudio ha revelado aspectos didácticos tales como la existencia de dos conceptos diferentes subyacentes a la *Representación gráfica de una función*, lo que lleva a distintos posibles pares de contenidos matemáticos en la relación de requerimiento y, por tanto, a distintas posibilidades de secuenciación de contenidos.

Se ha concluido, además, que la organización por curso académico de los contenidos matemáticos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria establecida por la normativa educativa y sus concreciones curriculares, es de carácter espiral. Ello en concordancia con la importancia del aprendizaje en espiral respaldada por Bruner (2004).

- En relación directa a la aplicación de la metodología propuesta en esta investigación, se ha comprobado mediante el análisis del grafo de estudio elaborado, su éxito en los tres procesos propósito de estudio: selección, organización y secuenciación de contenidos matemáticos.

Así, con respecto a la selección de contenidos, se han podido identificar aquellos contenidos clave en base a su significatividad, dentro del conjunto de contenidos considerado. Concretamente, se han identificado aquellos contenidos matemáticos caracterizados de suma importancia para la comprensión de otros contenidos, así como aquellos considerados más complejos, en el sentido de necesitar de un elevado número de contenidos para su conocimiento.

Se ha concluido también, gracias al apoyo computacional, que existe un porcentaje considerable de contenidos matemáticos que no son prerrequisito de ninguno de los contenidos considerados. Hecho que demuestra de forma cuantitativa, el número de contenidos propios de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria que pueden verse como objetivo de la misma. Además, estos contenidos han sido identificados dentro del conjunto de contenidos de toda la etapa. Por otra parte, se han identificado también con exactitud, aquellos contenidos matemáticos que pueden considerase previos de esta etapa educativa.

Se ha demostrado cuantitativamente, el conocido dato cualitativo, sobre la elevada interconexión existente entre los diferentes contenidos matemáticos considerados dentro de la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria.

Se ha conseguido un método de selección de contenidos basado en técnicas de teoría de grafos, que además de ser de gran utilidad para los procesos de planificación de la enseñanza, puede ser de gran interés para la determinación de lo que se conoce como epítome en uno de los fundamentos de esta investigación, la Teoría de la elaboración de Reigeluth.

En relación también a este aspecto, se ha obtenido una metodología dinámica que permite la identificación, para cualquier contenido matemático, del conjunto de contenidos que son necesarios para su conocimiento, así como la identificación del conjunto de aquellos contenidos que lo precisan para su conocimiento. Además de tal identificación, se ha conseguido un método de disposición jerárquica de los contenidos en niveles, que pone en práctica la concepción de organización considerada en la fundamentación ecléctica determinada para este estudio.

Referente a la organización de contenidos, han surgido nuevas formas diferentes a las dispuestas en los libros de texto de manera general, y, en consecuencia, a las establecidas en la normativa de la que estos derivan. Concretamente, se ha obtenido una clasificación de contenidos en cinco clusters, y se ha concluido que, aunque coinciden en número con los bloques de contenido considerados, sus organizaciones internas son muy diferentes. Además, con respecto a las unidades temáticas consideradas se ha concluido que, en general, no están formadas por contenidos de un único cluster.

Ello conduce a la conclusión de que la metodología propuesta ha conseguido, por una parte, la creación de nuevas formas de organización de contenidos matemáticos distintas a las habituales y, por otra, ha permitido poner en práctica, a diferencia de los libros de texto, el consejo establecido por la normativa educativa, referente a no tratar los bloques de contenidos que esta propone como compartimentos estancos, cerrados e independientes.

En referencia a la secuenciación de contenidos, se ha obtenido una forma de representación gráfica de contenidos matemáticos que, atendiendo a una disposición jerárquica, permite tanto la visualización de la estructura del conocimiento matemático, como la posibilidad de establecer secuencias entre los contenidos así representados.

Además, se ha obtenido una metodología de representación gráfica que permite secuenciar el conjunto de contenidos matemáticos existentes en función de la relación de requerimiento establecida, entre pares de contenidos matemáticos. Con ello se ha conseguido una metodología dinámica de secuenciación de aquellos contenidos que es preciso conocer para la comprensión de un determinado contenido, suponiendo el conocimiento de otro.

Ello aporta así, en base a la estructura de grafo que fundamenta la metodología, posibles formas de secuenciación no lineales, en concordancia una vez más con la fundamentación teórica de este estudio, posicionada en contra de toda secuenciación lineal. Además de ello, se ha conseguido también poner en práctica otro consejo establecido por la normativa educativa referente a no tratar de manera independiente los bloques de contenido determinados por ella.

- Como consecuencia de lo anterior, se ha comprobado además el dinamismo en tiempo real que posee la metodología propuesta, característica que la convierte en una herramienta viva con la posibilidad de llevar a cabo continuos y diversos análisis exploratorios sobre la estructuración del conocimiento matemático.

- En relación al proceso de selección de contenidos y al software empleado en este estudio, y tras una labor de investigación sobre las posibilidades del software elegido, se ha comprobado la verdadera eficiencia de la arquitectura modular de Gephi, así como la actividad del foro[59] y grupo de Facebook[60] de este software. Concretamente, tras concluir que Gephi no poseía la opción de identificación de los predecesores y sucesores de un determinado nodo del grafo de

[59] www.forum.gephi.org

[60] https://www.facebook.com/groups/gephi/

estudio, nos pusimos en contacto con personas muy activas en el desarrollo del programa y, después de valorar la necesidad de tal función, Wouter Spekkink[61] respondió a nuestra petición, desarrollando en Java un plugin con tal finalidad.

- Otra consecuencia importante en relación a la metodología propuesta en este trabajo es que el factor computacional de esta metodología ha permitido mantener al margen cualquier preconcepción del investigador respecto al análisis de nuevas formas de selección, organización y secuenciación de contenidos, característica que conlleva el estudio autónomo de una gran cantidad de posibilidades respecto a los procesos de estructuración.

- Respecto a otras posibilidades de aplicación de la metodología propuesta, se ha concluido que existe una gran variedad de opciones, puesto que, por un lado, los contenidos matemáticos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria aquí empleados pueden sustituirse por contenidos de otras etapas educativas, así como de otras áreas de conocimiento, y por otro lado, el criterio de carácter epistemológico aquí definido, puede reemplazarse por otro tipo de criterio que se considere adecuado para la estructuración del conocimiento. Con ello, se ha concluido que, además de emplear esta metodología para procesos de planificación de la enseñanza, puede utilizarse para otros fines tales como la creación de diseños curriculares o el desarrollo de materiales educativos.

En relación a las limitaciones que se han tenido en la presente investigación y no se han podido superar, cabe mencionar la inviabilidad de emplear concreciones curriculares derivadas de la ley orgánica educativa española actualmente vigente, la LOMCE, debido a factores temporales con motivo del propio calendario de la aplicación de la misma. Sin embargo, es preciso mencionar al respecto que esto no ha supuesto en absoluto ningún impedimento para esta investigación, ya que, por un lado, sí se ha podido realizar un análisis de la normativa educativa actualmente vigente en lo concerniente al objetivo principal de este estudio y, por otro lado, el uso de concreciones curriculares derivadas de esta normativa solamente habría supuesto una pequeña ampliación con respecto a las ya consideradas en el presente estudio.

Con respecto a la prospectiva de esta investigación, se distinguen las siguientes líneas perfectamente factibles de desarrollo:

[61] http://www.wouterspekkink.org/

- La forma en la que se ha llevado a cabo el proceso de almacenamiento de los contenidos matemáticos considerados en este estudio, supone la existencia de una base de datos con información de interés para estudios de muy diversa índole. Entre otros muchos, la base de datos así creada puede resultar muy adecuada para la realización de estudios comparativos de contenido entre los diferentes cursos, tanto a nivel propio de curso como de bloque de contenido y unidad didáctica, así como para la realización de análisis globales de contenido de toda la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

- En relación al software empleado en la presente investigación, y debido a que el programa Gephi no contempla en la actualidad una opción de cálculo ni de la clausura transitiva ni de la reducción transitiva de un grafo, sería interesante y factible, gracias a su arquitectura modular, el desarrollo de un plugin en lenguaje de programación Java que permitiera tales propósitos. Esta opción, aumentaría considerablemente las posibilidades de este software para otros estudios, ya que, tanto la clausura como la reducción transitiva de un grafo, son de gran interés para la teoría de grafos y, en consecuencia, para sus aplicaciones.

- Debido a que la metodología propuesta y aplicada en este estudio es perfectamente transferible a otras áreas y niveles de educativos distintos de los aquí contemplados y a otros campos de ámbito general de conocimiento, puede resultar de interés su ampliación, entre otros, a por ejemplo:

    - Contenidos matemáticos propios de otra etapa educativa diferente a la Educación Secundaria Obligatoria, lo que permitiría analizar la estructuración del conocimiento matemático de esa otra etapa educativa.
    - Contenidos matemáticos propios de varias etapas educativas, lo que posibilitaría analizar en conjunto la estructuración del conocimiento matemático de esas etapas.
    - Contenidos propios de otra disciplina científica diferente a la matemática, para los dos casos anteriores.
    - Otro tipo de contenidos diferentes a los casi puramente conceptuales tratados en esta investigación, propósito para el que sería necesario adecuar al nuevo tipo de contenido, el criterio de estructuración considerado en este estudio.

- La metodología propuesta, por otro lado, podría emplearse para propósitos explícitos de análisis y comparación de concreciones curriculares tales como los libros de texto, además de para el diseño de propuestas curriculares concretas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abellanas, M. y Lodares, D. (1990). *Análisis de algoritmos y teoría de grafos.* RA-MA.

Adar, E. (2006). GUESS: a language and interface for graph exploration. *Proceedings of the SIGCHI conference on Human Factors in computing systems* (págs. 791-800). ACM.

Aho, A., Garey, M. y Ullman, J. (1972). The transitive reduction of a directed graph. *SIAM Journal on Computing*, 131-137.

Alarcón, J. D., Fernández, J. R., González, L. A. y Martínez, J. J. (2007). Precedencia Difusa y Generación de Itinerarios Docentes en Sistemas LCMS. *SPDECE*.

Álvarez, A., Kuz, A. y Falco, M. (2013). Gephi: Análisis de Interacciones en un Foro, a través de ARS en el aula. *TE & ET*(11), 66-75.

Álvarez, M. N., Balaguer, N. y Carol, R. (2000). *Valores y temas transversales en el currículum.* Laboratorio Educativo.

Appel, K. y Haken, W. (1977a). Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. *Illinois Journal of Mathematics, 21*, 429–490.

Appel, K. y Haken, W. (1977b). Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics, 21*, 491–567.

Arenas, A. C. (2005). *Mapas conceptuales, mapas mentales: y otras formas de representación del conocimiento.* Editorial Magisterio.

Arlazarov, V. L., Dinits, E. A., Kronrod, M. A. y Faradzhev, I. A. (1970). On economical construction of transitive closure of an oriented graph. *Doklady Akademii Nauk SSSR, 194*(3), 487.

Armbruster, B. B. y Anderson, T. H. (1982). Idea-mapping: the technique and its use in the classroom or simulating the" ups" and" downs" of reading comprehension. *Reading education report*(36).

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.*

Ausubel, D. P. (1973). Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento. En S. Elam, *La educación y la estructura del conocimiento: investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y la naturaleza de las disciplinas que integran el currículum* (págs. 211-239). Buenos Aires: El Ateneo.

Ausubel, D. P. y Barberán, G. S. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva.* Barcelona: Paidós.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Azcárate, P. (2007). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de Matemáticas. En J. Durán, *Enfoques actuales en la Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: MEC, Colección Aulas de Verano.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de educación*(340).

Balakrishnan, R. y Ranganathan, K. (2012). *A Textbook of Graph Theory.* New York: Springer Science & Business Media.

Ballesta, J. (1995). Función didáctica de los materiales curriculares. *Pixel-Bit: Revista de médios y educación*(5), 3.

Barrón, A. (1991). *Aprendizaje por descubrimiento análisis crítico y reconstrucción.* Salamanca: Amaru ediciones.

Bastian, M., Heymann, S. y Jacomy, M. (2009). Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks. *International Conference on Weblogs and Social Media (ICWSM), 8*, 361-362.

Batagelj, V. y Mrvar, A. (1998). Pajek-program for large network analysis. *Connections, 21*(2), 47-57.

Batagelj, V. y Mrvar, A. (2004). Pajek—analysis and visualization of large networks. En M. Jünger y P. Mutzel, *Graph Drawing Software* (págs. 477-478). Springer Berlin Heidelberg.

Batagelj, V. y Mrvar, A. (2014). Pajek. En R. Alhajj y J. Rokne, *Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining* (págs. 1245-1256). Springer New York.

Bautista, J. y Pereira, J. (2002). Una Revisión de Modelos para el Diseño de Itinerarios y su Aplicabilidad a los Problemas de Recogida de Residuos Urbanos. *II Conferencia de Ingeniería de Organización*, (págs. 649-656). Vigo.

Beissner, K. L., Jonassen, D. H. y Grabowski, B. (1994). Using and selecting graphic techniques to adquire structural knowledge. *Performance Improvement Quarterly, 7*(4), 20-38.

Biggs, N. L. (2003). *Discrete Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Bizarro, N., Luengo, R., Casas, L. M. y Torres, J. L. (2015). Aplicación de las Redes Asociativas Pathfinder: al análisis de los conceptos forma, tamaño y color en alumnos con Discapacidad Intelectual.

Blondel, V. D., Guillaume, J. L., Lambiotte, R. y Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 10*.

Bollobás, B. (1998). *Modern graph theory.* New York: Springer-Verlag.

Boostrom, R. (2001). Whither textbooks? *Journal of Curriculum Studies, 33*(2), 229-243.

Borgatti, S. P. (2002). *NetDraw software for network visualization* (Vol. 95). Lexington, KY: Analytic Technologies.

Borgatti, S. P., Everett, M. G. y Freeman, L. C. (2002). *Ucinet for Windows: Software for social network analysis.* Harvard, MA: Analytic Technologies.

Borre, E. (1996). *Libros de texto en el caleidoscopio. Estudio crítico de la literatura y la investigación sobre los textos escolares.* Barcelona: Pomares-Corredor.

Brihuega, J., Molero, M. y Salvador, A. (1998). *Didáctica de las Matemáticas. Formación de Profesores de Educación Secundaria.* Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Complutense de Madrid.

Brinkmann, A. (1999). Investigating the Use of Concept Mapping as Tools in Mathematics Education. *Network, 48*.

Brinkmann, A. (2001). Mathematical Networks–Conceptual Foundation and Graphical Representation. *Current State of Research on Mathematical Beliefs X, Proceedings of the MAVI-10 European Workshop.*, (págs. 7-16). Sweden.

Brinkmann, A. (2003). Graphical knowledge display–mind mapping and concept mapping as efficient tools in mathematics education. *Mathematics Education Review, 16*, 35-48.

Brinkmann, A. (2005). Knowledge maps–tools for building structure in mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Bromley, K. D., Irwin-DeVitis, L. y Modlo, M. (1995). *Graphic organizers: Visual strategies for active learning.* Scholastic Professional Books.

Brownell, W. A. (2004). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Classics in mathematics education research*, 8-15.

Bruner, J. S. (1963). *El proceso de la educación.* Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1991). *Actos de significado: más allá de la revolución cognitiva.* Alianza editorial.

Bruner, J. S. (1998). *Desarrollo cognitivo y educación.* Psicología.

Bruner, J. S. (2003). La estructura básica de una disciplina. *C. June Maker, Teaching models in education of the gifted*.

Bruner, J. S. (2004). *Curriculum en espiral.* Madrid: Morata.

Butts, C. T. (2008). Social network analysis with SNA. *Journal of Statistical Software, 24*(6), 1-51.

Buzan, T. y Buzan, B. (1996). *El libro de los mapas mentales: cómo utilizar al máximo las capacidades de la mente.* Ediciones Urano.

Calderero, J. F. (2003). *Estudio de libros de texto de ciencias de la naturaleza mediante análisis cuantitativo basado en la teoría de grafos.* Universidad Complutense de Madrid. Tesis doctoral. Directores: Monzón, C. y Sánchez, P.

Camino, L. (2012). *Herramienta de visualización para un simulador de propagación de enfermedades contagiosas.* Universidad Carlos III Madrid. Trabajo fin de grado. Tutores: Expósito, D.,Marinescu, M. C.

Campos, A. (2000). *Acerca de la Epistemología de la Matemática.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Cañas, A. J., Coffey, J. W., Carnot, M. J., Feltovich, P., Hoffman, R. R., Feltovich, J. y Novak, J. (2003). *A summary of literature pertaining to the use of concept mapping techniques and technologies for education and performance support.* Pensacola: FL: Institute for Human and Machine Cognition.

Cañas, A. J., Hill, G., Carff, R., Suri, N., Lott, J., Gómez, G., Eskridge, T. C., Arroyo, M. y Carvajal, R. (2004). CmapTools: A knowledge modeling and sharing environment. *Concept maps: Theory, methodology, technology. Proceedings of the first international conference on concept mapping*, (págs. 125-133). Pamplona.

Cardozo, O. D., Gómez, E. L. y Parras, M. A. (2009). Teoría de grafos y sistemas de información geográfica aplicados al transporte público de pasajeros en Resistencia (Argentina). *Revista Transporte y Territorio, 1*, 89-111.

Carlos, M., Gallardo, A. y Colomer, F. (2011). Comparación de métodos de optimización de rutas en la recogida de residuos sólidos urbanos aplicado a Castellón de la Plana. *Hacia la sustentabilidad: Los residuos sólidos como fuente de energía y materia prima* (págs. 145-150). Simposio Iberoamericano de Ingeniería de residuos (SIIR).

Casas, L. M. (2002). *El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría.* Badajoz: Universidad de Extremadura. Tesis doctoral. Director: Luengo, R.

Casas, L. M. y Luengo, R. (1999). La exploración de la estructura conceptual en los alumnos: un método empírico: las redes asociativas Pathfinder. *Campo abierto: Revista de educación, 16*, 11-34.

Casas, L. M. y Luengo, R. (2001). Aproximacion al concepto de ángulo a traves de redes asociativas Pathfinder en alumnos de educacion Primaria y Secundaria Obligatoria. *Campo Abierto. Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura, 17*, 41-60.

Casas, L. M. y Luengo, R. (2004a). Teoría de los Conceptos Nucleares: Aplicación en Didáctica de las Matemáticas, un ejemplo en Geometría. En R. Luengo, *Líneas de Investigación en Educación Matemática* (págs. 127-164). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper".

Casas, L. M. y Luengo, R. (2004b). Representación del conocimiento y aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de pedagogía*(227), 59-84.

Casas, L. M. y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(2), 201-216.

Casas, L. M., Canchado, M., Godinho, V. y Verissimo, S. (2012). Representación del conocimiento: redes asociativas pathfinder como alternativa a mapas conceptuales en Educación Infantil. *CmapTools: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of the Fifth International Conference on Concept Mapping.* Malta.

Casas, L. M., Luengo, R., Canchado, M. y Torres, J. L. (2013). Una experiencia de representación del conocimiento en Educación Infantil mediante el uso de redes asociativas Pathfinder. *RED. Revista de Educación a distancia, 36*, 1-17.

Castellano, C., Cecconi, F., Loreto, V., Parisi, D. y Radicchi, F. (2004). Self-contained algortihms to detect communities in networks. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 38*(2), 311-319.

Castillo, C. y Baeza-Yates, R. (2005). Wire: an open-source web information retrieval environment. *Workshop on Open Source Web Information Retrieval (OSWIR)*, 27-30.

Chartrand, G. y Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGraw-Hill.

Chartrand, G. y Zhang, P. (2005). *Introduction to Graph Theory.* McGraw-Hill.

Cherven, K. (2013). *Network graph analysis and visualization with Gephi.* Packt Publishing Ltd.

Cherven, K. (2015). Mastering Gephi Network Visualization. *Packt Publishing Ltd*.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Vol. 3). AIQUE Grupo Editor.

Cirre, F. J. (2004). *Matemática discreta.* Anaya.

Clauset, A., Newman, M. y Moore, C. (2004). Finding community structure in very large networks. *Physical Review E, 70*(6).

Clough, J., Gollings, J., Loach, T. y Evans, T. (2014). Transitive reduction of citation networks. *Journal of Complex Networks*, 189-203.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Cohen, J. y Roth, M. M. (1976). On the implementation of Strassen's fast multiplication algorithm. *Acta Informatica, 6*(4), 341-355.

Coll, C. (1987). *Una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículo escolar.* Laia Barcelona.

Coll, C. y Rochera, M. J. (1990). Estructuración y organización de la enseñanza: las secuencias de aprendizaje. En J. Palacios, A. Marchesi y C. Coll, *Desarrollo psicológico y educación* (págs. 373-394). Alianza Editorial.

Coll, C. y Solé, I. (1989). *Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica* (Vol. 168(4)). Cuadernos de pedagogía.

Coll, C., Marchesi, A. y Palacios, J. (1990). *Desarrollo psicológico y educación.* Alianza Editorial.

Combe, D., Largeron, C., Egyed-Zsigmond, E. y Géry, M. (2010). A comparative study of social network analysis tools. *International Workshop on Web Intelligence and Virtual Enterprises*, *2*, págs. 1-12.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro, P. Flores, L. Rico y A. Vallecillos, *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (págs. 277-287). Granada: Universidad de Granada.

Conway, D. y White, J. M. (2012). Analyzing Social Graphs, Visualizing the Clustered Twitter Network with Gephi. En D. Conway y J. M. White, *Machine Learning for Hackers* (págs. 261-267). O'Reilly.

Cordobés, H., Fernández, ,. A., Núñez, L. F., Pérez, F., Redondo, T. y Santos, A. (2013). Técnicas basadas en grafos para la categorización de tweets por tema. *XXIX Congreso de la Sociedad Española para el Procesamiento del Lenguaje Natural (SEPLN) TASS*, (págs. 160-166).

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. y Stein, C. (2009). *Introduction to algorithms.* MIT Press.

Correa, A. A., Cogollo, J. M. y Salazar, J. C. (2012). Aplicación de la teoría de grafos en la solución de problemas con impacto ambiental. *Producción+ Limpia, 6*(1), 9-20.

Csárdi, G. y Nepusz, T. (2006). The igraph software package for complex network research. *InterJournal, Complex Systems, 1695*(5), 1-9.

Dawes, M. J. y Ostwald, M. J. (2013). Applications of Graph Theory in Architectural Analysis: Past, Present and Future Research. En A. Cavalcante, *Graph Theory: New Research* (págs. 1-36). New York: Nova Science Publishers.

de Castro, C. (1999). *Mapas cognitivos. Qué son y cómo explorarlos.* Scripta Nova.

de Nooy, W., Mrvar, A. y Batagelj, V. (2011). *Exploratory social network analysis with Pajek* (Vol. 27). Cambridge University Press.

de Puelles, M. (2013). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. *Historia de la Educación, 19*, 5-11.

del Carmen, L. (1994). Guía para el análisis de materiales curriculares. *El Patio, 7*, 7-9.

Díaz, J. L. y Morales, L. (2005). El concepto de variable en los libros de texto. En D. d. Matemáticas, *Memorias de la XV semana regional de investigación y docencia en Matemáticas* (págs. 39-44).

Duque, R. G. (2011). *Python para todos.*

Edmondson, K. (2000). La evaluación de comprensión de la ciencia a través de los mapas conceptuales. En J. J. Mintzes, J. H. Wandersee y J. D. Novak, *La evaluación de comprensión de la ciencia* (págs. 19-40). San Diego: Academic Press.

Ellson, J., Gansner, E., Koutsofios, L., North, S. C. y Woodhull, G. (2002). Graphviz—open source graph drawing tools. En P. Mutzel, M. Jünger y S. Leipert, *Graph Drawing* (págs. 483-484). Springer Berlin Heidelberg.

Erdös, P. y Rényi, A. (1959). On random graphs. *Publ Math Debrecen, 6*, 290-297.

Escamilla, A. (2008). *Las competencias básicas.* Barcelona: Graó.

Escudero, J. M. (1979). *Tecnología educativa: diseño de material escrito para la enseñanza de conceptos.* Valencia: Universidad de Valencia, Instituto de Ciencias de la Educación.

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8.*(8), 128-140.

Fischer, M. J. y Meyer, A. R. (1971). Boolean matrix multiplication and transitive closure. *Twelfth Annual Symposium on Switching and Automata Theory* , 129-131.

Fisher, K. M. (1990). Semantic networking: The new kid on the block. *Journal of Research in Science Teaching, 27*(10), 1001-1018.

Fortunato, S. (2010). Community detection in graphs. *Physics Reports, 486*, 75-174.

Freeman, L. C. (2000). Visualizing social networks. *Journal of social structure, 1*(1), 4.

Fruchterman, T. M. y Reingold, E. M. (1991). Graph drawing by force-directed placement. *Software: Practice and Experience, 21*(11), 1129-1164.

Furman, M. E. (1970). Application of a method of fast multiplication of matrices in the problem of finding the transitive closure of a graph. *Doklady Akademii Nauk, 194*(3), 524.

Gagnè, R. M. (1962). The acquisition of knowledge. *Psychological review, 69*(4), 355.

Gagnè, R. M. (1970). *Las condiciones del aprendizaje.* Madrid: Aguilar.

Gagnè, R. M. (1973). Learning and instructional sequence. *Review of research in education*, 3-33.

Galagovsky, L. R. (1993). Redes conceptuales: base teórica e implicaciones para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Enseñanza de las Ciencias, 11*, 301-307.

Galagovsky, L. R. (1996). *Redes conceptuales. Aprendizaje, comunicación y memoria.* Buenos Aires: Lugar Editorial.

Galán, E., Granell, R. y Huerta, P. (2002). Los mapas conceptuales en educación Matemática: antecedentes y estado actual de la investigación. *VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

Gallegos, J. A. (1998). La secuenciación de los contenidos curriculares: principios fundamentales y normas generales. *Revista de Educación*(315), 293-315.

García, C., López, J. M. y Puigjaner, D. (2002). *Matemática discreta.* Pearson Educación.

García, F. (1995). Guía para la evaluación de materiales curriculares impresos. *Aula de Innovación Educativa, 4*(40-41), 77-80.

García, J. A. (1990). Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: la teoría del aprendizaje verbal significativo. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi, *Desarrollo psicológico y educación* (Vol. 2, págs. 81-92). Madrid: Alianza Editorial.

Garrido, J. (1995). La organización espacial de la red de carreteras en Aragón: aplicación metodológica de la teoría de grafos. *Geographicalia, 32*, 83-102.

Geva, E. (1985). Mejora de la comprensión lectora mediante diagramas de flujo. *Infancia y Aprendizaje, 8*(31-32), 45-66.

Gil, J., Suero, M. I. y Pérez, Á. L. (2004). Macrosecuencia instruccional de óptica siguiendo la teoría de la elaboración de Reigeluth y Stein implementada en CmapTools. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping.* Pamplona.

Girvan, M. y Newman, M. E. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 99*(12), 7821-7826.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros.

Gómez, D., Zarrazola, E., Montero, J. y Yañez, J. (2012). Clasificación no supervisada y jerárquica basada en coloración en gras: una aplicación a imágenes astronómicas. *XVI Congreso español sobre tecnología y lógica Fuzzy (ESTYLF)*, (págs. 492-497). Valladolid.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria.* Granada: Universidad de Granada. Tesis doctoral. Director: Rico, L.

Gonthier, G. (2008). Formal proof. The four color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*(55), 1382-1393.

González, A. (2011). Análisis gráfico del transporte de balón en balonmano. *XIV Seminario Internacional y II Latinoamericano de Praxiología Motriz.*

González, F. M. (1992). Los mapas conceptuales de JD Novak como instrumentos para la investigación en didáctica de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 10*, 148-158.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Universidad de Salamanca. Tesis doctoral. Director: Modesto Sierra Vázquez.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Goñi, J. M. (2011). El currículo de Matemáticas en la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. En J. Goñi, *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar.* Graó.

Goodreau, S. M., Handcock, M. S., Hunter, D. R., Butts, C. T. y Morris, M. (2008). A statnet Tutorial. *Journal of statistical software, 24*(9).

Gries, D., Martin, A. J., van de Snepscheut, J. L. y Udding, J. T. (1989). An algorithm for transitive reduction of an acyclic graph. *Science of Computer Programming, 12*(2), 151-155.

Gross, J. L. y Yellen, J. (2005). *Graph theory and its applications.* CRC press.

Guthrie, F. (1880). Note on the Colouring of Maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 10*, 727-728.

Gutiérrez, R. (1989). Psicología y aprendizaje de las ciencias. El modelo de Gagné. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(2), 147-157.

Habib, M., Morvan, M. y Rampon, J. X. (1993). On the calculation of transitive reduction—closure of orders. *Discrete mathematics, 111*(1), 289-303.

Hansen, D., Shneiderman, B. y Smith, M. A. (2010). *Analyzing social media networks with NodeXL: Insights from a connected world.* Morgan Kaufmann.

Harary, F. (1994). *Graph Teory.* Perseus Books.

Harris, J. (1997). Professional Development for Math and Science. *ENC Focus, 4*(4), 4.

Hasemann, K. y Mansfield, H. (1995). Concept mapping in research on mathematical knowledge development: Background, methods, findings and conclusions. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 45-72.

Heimlich, J. E. y Pittelman, S. D. (1990a). *Los mapas semánticos.* Madrid: Visor.

Heimlich, J. E. y Pittelman, S. D. (1990b). *Mapas semánticos: estrategias de aplicación en el aula.* Ministerio de Educación y Ciencia.

Heimlich, J. E. y Pittelman, S. D. (1991). *El mapa semántico.* Argentina: Aique.

Heimlich, J. E. y Pittelman, S. D. (2001). *Elaboración de mapas semánticos como estrategia de aprendizaje: aplicaciones para el salón de clases.* Trillas.

Heymann, S. (2014). Gephi. En R. Alhajj y J. Rokne, *Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining* (págs. 612-625). Springer New York.

Heymann, S. y Le Grand, B. (2013). Visual Analysis of Complex Networks for Business Intelligence with Gephi. *17th International Conference on Information Visualization* (págs. 307-312). IEEE.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). *Learning and teaching with understanding.*

Hoffman, C. (2001). *Introduction to sociometry* (Vol. 1). Retrieved February.

Howard, R. A. (1989). Knowledge maps. *Management science, 35*(8), 903-922.

Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks:: A Comprehensive Study of Grade 8 Texts.* Pacific Educational Press.

Huisman, M. y Van Duijn, M. A. (2003). StOCNET: Software for the statistical analysis of social networks. *Connections, 25*(1), 7-26.

Huisman, M. y Van Duijn, M. A. (2005). Software for social network analysis. En P. J. Carrington, J. Scott y S. Wasserman, *Models and methods in social network analysis* (págs. 270-316). Cambridge University Press.

Hyerle, D. (1996). Thinking Maps: Seeing Is Understanding. *Educational leadership, 53*(4), 85-89.

Hyerle, D. y Alper, L. (2011). *Student successes with thinking maps: school-based research, results, and models for achievement using visual tools.* Corwin Press.

Hyun, Y. (2005). *Walrus-graph visualization tool.*

Jacobson, R. (2007). *Excel 2007. Visual Basic para Aplicaciones.* ANAYA MULTIMEDIA.

Jacomy, M., Heymann, S., Venturini, T. y Bastian, M. (2011). Forceatlas2, a continuous graph layout algorithm for handy network visualization. *Medialab center of research, 560*.

Jacomy, M., Venturini, T., Heymann, S. y Bastian, M. (2014). Forceatlas2, a continuous graph layout algorithm for handy network visualization designed for the gephi software. *PLoS ONE, 9*(6).

Jiménez, J. y Perales, F. J. (2001). Aplicación del análisis secuencial al estudio del texto escrito e ilustraciones de los libros de física y química de la ESO. *Enseñanza de las Ciencias, 19*, 3-19.

Johnson, D. D. y Pearson, P. D. (1984). *Teaching reading vocabulary.* Holt Rinehart & Winston.

Kamada, T. y Kawai, S. (1989). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information processing letters, 31*(1), 7-15.

Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic Transposition in Mathematics Textbooks. *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 2-7.

Kaufmann, A. (1976). *Puntos y flechas: teoría de los grafos.* Barcelona: Marcombo.

King, A. R. y Brownell, J. A. (1966). *The curriculum and the disciplines of knowledge.* New York: Wiley.

Kitchin, R. M. (1994). Cognitive maps: What are they and why study them? *Journal of environmental psychology, 14*(1), 1-19.

Kleinberg, J. M., Kumar, R., Raghavan, P., Rajagopalan, S. y Tomkins, A. S. (1999). The web as a graph: measurements, models, and methods. *Computing and combinatorics*, 1-17.

Knoke, D. y Yang, S. (2008). *Social network analysis* (Vol. 154). Sage.

Kocay, W. y Kreherv, D. L. (2005). *Graphs, Algorithms, and Optimization.* CRC Press.

Kohl, M., Wiese, S. y Warscheid, B. (2011). Cytoscape: software for visualization and analysis of biological networks. En M. Hamacher, M. Eisenacher y C. Stephan, *Data Mining in Proteomics* (págs. 291-303). Humana Press.

Kopp, F. (1967). *Fundamentos de Didáctica.* Madrid: Dirección General de Enseñanza Media.

Kuchemann, D. (1989). Learning and teaching ratio: A look at some current textbooks. *Mathematics teaching: The state of the art*, 119-135.

Lanczos, C. (1950). *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators.* United States Government Press Office.

Landa, L. N. (1976). *Instructional regulation and control.* New Jersey: Educational Technology.

Lerma, I. S. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas: las configuraciones gráficas de datos.* Universidad del País Vasco.

Leydesdorff, L. (2007). Visualization of the citation impact environments of scientific journals: An online mapping exercise. *Journal of the American society for Information science and technology, 58*(1), 25-38.

Lipschutz, S. (1993). *Estructura de datos.* McGraw-Hill.

Liu, X. y Hinchey, M. (1993). The validity and reliability of concept mapping as an alternative science assessment. *The Proceedings of the Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics.* New Jersey.

LOE. (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* Boletín Oficial del Estado, núm 106, 4 de mayo de 2006.

LOGSE. (1990). *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo.* Boletín Oficial del Estado, núm 238, 4 de octubre de 1990.

LOMCE. (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.* Boletín Oficial del Estado, núm 295, 10 de diciembre de 2013.

López, M. H. y Morán, T. C. (2010). *Programación PERT-CPM y control de proyectos.* Fondo Editorial Capeco.

Love, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. *International handbook of mathematics education*, 371-409.

Luengo, R. y Casas, L. M. (2003). Redes Asociativas Pathfinder y Teoría de los Conceptos Nucleares. Aportaciones a la investigación en Didáctica de las Matemáticas. 179-188.

Machado, A. M. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. *Investigación en Educación matemática XIII*, 5-20.

Malone, J. y Dekkers, J. (1984). The concept map as an aid to instruction in science and mathematics. *School science and mathematics, 84*(3), 220-231.

Markham, K. M., Mintzes, J. J. y Jones, M. G. (1994). The concept map as a research and evaluation tool: Further evidence of validity. *Journal of research in science teaching, 31*(1), 91-101.

Martín, E. y Méndez, A. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *Suma*(46), 31-35.

Massa, M. y Mulhall, W. (1992). El esquema de los tres espacios como base para generar la estructura conceptual de una teoría física. *Cuaderno Catarinense de Ensino, 9*(3), 201-208.

McClure, J. R. (1999). Concept Maps and the Acquisition of Cognitive Skill: Concept Maps as a Tool to Study Skill Acquisition. *Annual meeting of the American Educational Research Association*.

Merayo, F. G. (2005). *Matemática discreta.* Thomson-Paraninfo.

Molina, J. L., Muñoz, J. M. y Domènech, M. (2002). Redes de publicaciones científicas: un análisis de la estructura de coautorías. *Redes: revista hispana para el análisis de redes sociales, 1*.

Monereo, C. y Pozo, J. I. (2007). Competencias básicas. *Cuadernos de pedagogía, 370*, 10-18.

Monsalve, M. (2008). Análisis de redes sociales: un tutorial. *Revista Bits de Ciencia*.

Monterrubio, M. C. (2000). Necesidad de conocer modelos de valoración de textos. *Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*, 161-166.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). *Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones.*

Moreira, M. A. (2000). *Aprendizaje significativo: teoría y práctica.* Madrid: Visor.

Moreira, M. A. (2008). *Mapas conceptuales y aprendizaje significativo.*

Moreno, J. L. (1954). *Fundamentos de la ociometría.* Buenos Aires: Paidós.

Moya, J. y Luengo, F. (2011). *Teoría y práctica de las competencias básicas. Crítica y Fundamentos.* Barcelona: Graó.

Munro, I. (1971). Efficient determination of the strongly connected components and transitive closure of a directed graph. *Information Processing Letters, 1*(2), 56-58.

Murray, J. M. (1988). Principles of second language Teacher Education: Integrating Multiple Perspectives. *Journal of Australian Tesol, 9*(1), 7-88.

Mwakapenda, W. y Adler, J. (2003). Using concept mapping to explore student understanding and experiences of school mathematics. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 7*(1), 51-62.

Myers, S. A., Sharma, A., Gupta, P. y Lin, J. (2014). Information network or social network?: The structure of the twitter follow graph. *Proceedings of the companion publication of the 23rd international conference on World wide web companion* (págs. 493-498). International World Wide Web Conferences Steering Committee.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Newman, M. E. (2006a). Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices. *Physical Review E, 74*(3).

Newman, M. E. (2006b). Modularity and community structure in network. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 103*(23), 8577-8582.

Newman, M. E. y Girvan, M. (2004). Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E-Statistical, Nolinear and Soft Matter Physics, 69*.

Nieto, Á. (2013). *Aplicación de nuevas herramientas basadas en estructuras de grafos para la caracterización de redes de áreas cortafuegos en la planificación forestal a escala del paisaje.* Universitat de Lleida. Tesis doctoral. Director: Vega, C.

Novak, J. D. (1988a). *Teoría y práctica de la educación.* Madrid: Alianza Universidad.

Novak, J. D. (1988b). Constructivismo humano: un consenso emergente. *Enseñanza de las Ciencias, 6*, 213-223.

Novak, J. D. (1991). Ayudar a los alumnos a aprender cómo aprender. La opinión de un profesor-investigador. *Enseñanza de las Ciencias, 9*, 215-228.

Novak, J. D. (1995). Concept mapping: A strategy for organizing knowledge. En S. Glynn y R. Duit, *Learning science in the schools: Research reforming practice* (págs. 229-245). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Novak, J. D. (1998). *Learning, creating, and using knowledge.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Novak, J. D. y Cañas, A. J. (2006). *La Teoría Subyacente a los Mapas Conceptuales y a Cómo Construirlos.*

Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

O'Madadhain, J., Fisher, D., White, S. y Boey, Y. (2003). *The jung (java universal network/graph) framework.* California: University of California.

O'donnell, A. M., Dansereau, D. F. y Hall, R. H. (2002). Knowledge maps as scaffolds for cognitive processing. *Educational Psychology Review, 14*(1), 71-86.

O'Neil, P. E. y O'Neil, E. J. (1973). A fast expected time algorithm for boolean matrix multiplication and transitive closure. *Information and control, 22*(2), 132-138.

Ontoria, A. (1994). *Mapas conceptuales: una técnica para aprender* (Vol. 125). Narcea Ediciones.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas: Motivación del alumnado y competencia matemática* (Vol. 218). Graó.

Otte, M. (1986). What is a text? *Perspectives on mathematics education*, 173-203.

Papadimitriou, C. H. (2003). *Computational complexity.* John Wiley & Sons Ltd.

Pearson, P. D. y Johnson, D. D. (1978). *Teaching reading comprehension.* Harcourt School.

Peñaranda, M., Quiñones, E. y Osca, J. (2009). La revista" Anales de Psicología" desde una perspectiva de redes sociales. *Anales de psicología, 25*(2), 199-208.

Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(5), 158-175.

Pérez, Á. I. (2007). *La naturaleza de las competencias básicas y sus implicaciones pedagógicas.* Consejería de Educación de Cantabria.

Pérez, Á. L. (1998). Mapa de experto tridimensional de dinámica: materiales para elaborar una macrosecuencia instruccional basada en la teoría de la elaboración de Reigeluth y Stein.

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Montanero, F. M., Pardo, P. J. y Montanero, M. M. (2001). Three-dimensional conceptual maps: an illustration for the logical structure of the content of optics. *International Conference Physics Teacher Education Beyond 200: Selected Contributions of International Conference.* Francia: Elservier.

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Montanero, M. M. y Montanero, F. M. (2000a). *Mapas de experto tridimensionales.* Consejería de Educación, Ciencia y Cultura de la Junta de Extremadura (Colección de Investigación Educativa).

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Montanero, M. M. y Montanero, F. M. (2000b). *Mapas de experto tridimensionales: aplicaciones al diseño de secuencias instruccionales de física, basadas en la teoría de la elaboración.*

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Montanero, M. M. y Montanero, F. M. (2000c). Propuestas de innovación en torno al análisis y secuenciación de contenidos en los diseños curriculares de física. *Bordón, 53*(2), 279-286.

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Montanero, M. M., Montanero, F. M., Rubio, S., Martín, M., Gil, J. y Solano, F. (1998). *Propuesta de un método de secuenciación de contenidos basado en la teoría de la elaboración de Reigeluth y Stein. Aplicación a la Física.* Badajoz: Universidad de Extremadura.

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Montanero, M. y Pardo, P. J. (2004). Aplicaciones de la Teoría de la Elaboración de Reigeluth y Stein a la Enseñanza de la Física. Una Propuesta en la Utilización del Programa Informático CmapTools. *Concept maps: Theory, methodology, technology. Proceedings of the first international conference on concept mapping.* Pamplona.

Pérez, Á. L., Suero, M. I., Pardo, P. J. y Montanero, M. (2006). Utilización de Mapas Conceptuales para Mejorar los Conocimientos Relativos a la Corriente Eléctrica Continua mediante su "Reconstrucción Colaborativa".

Phillips, D. y Kelly, M. (1975). Hierarchical theories of development in education and psychology. *Harvard Educational Review, 45*(3), 351-375.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1994). Mathematics classroom language form, function and force. *Didactics of mathematics as a scientific discipline, 13*, 159-169.

Pino, J., Jiménez, E., Ruíz, R. y Bailón, R. (2011). Evaluación de redes tecnocientíficas: la red española sobre áreas protegidas, según la Web of Science. *Revista española de documentación científica, 34*(3), 301-333.

Pons, P. y Latapy, M. (2006). Computing communities in large networks using random walks. *Journal of Graph Algorithms and Applications, 10*(2), 191-218.

Popper, K. R. (1972). *Objective knowledge: An evolutionary approach.* Oxford University Press.

Poza, J., García, M., Bachiller, A., Carreres, A., Rodríguez, E. y Hornero, R. (2012). Aplicación de la teoría de grafos para la caracterización de la actividad electroencefalográfica en la enfermedad de Alzheimer. *XXX Congreso Anual de la Sociedad Española de Ingeniería Biomédica (CASEIB)*, (págs. 1-4). San Sebastián.

Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata.

Preszler, R. W. (2004). Cooperative concept mapping improves performance in biology. *Journal of College Science Teaching, 33*, 30-35.

Primo, M. A. (2000). El uso de mapas conceptuales como instrumento de evaluación del aprovechamiento en ciencias: lo que sabemos hasta ahora. *Revista electrónica de investigación educativa, 2*(1).

Puchades, V., Mula, J. y Rodríguez, A. (2008). Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 6*, 7-22.

Purdom, P. (1970). A transitive closure algorithm. *BIT Numerical Mathematics, 10*(1), 76-94.

Quesada, R. (2001). *Cómo planear la enseñanza estratégica.* México: Limusa.

R.D.1007/1991. (1991). *Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial del Estado, núm 152, 26 de junio de 1991.

R.D.1105/2014. (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Boletín Oficial del Estado, núm 3, 3 de enero de 2015.

R.D.1190/2012. (2012). *Real Decreto 1190/2012, de 3 de agosto, por el que se modifican el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, y el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre.* Boletín Oficial del Estado, núm 186, 4 de agosto de 2012.

R.D.1631/2006. (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial del Estado, núm 5, 5 de enero de 2007.

R.D.1744/1998. (1998). *Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de Régimen General.* Boletín Oficial del Estado, núm 212, 4 de septiembre de 1998.

R.D.3473/2000. (2000). *Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria.* Boletín Oficial del Estado, núm 14, 16 de enero de 2001.

R.D.388/1992. (1992). *Real Decreto 388/1992, de 15 de abril, por el que se regula la supervisión de libros de texto y otros materiales curriculares para las enseñanzas de régimen general y su uso en los Centros docentes.* Boletín Oficial del Estado, núm 98, 23 de abril de 1992.

Raper, S. (2012). Graphing the history of philosophy. *Drunks and Lampposts blog, 13*.

Raymond, A. M. (1997). The Use of Concept Mapping in Qualitative Research: A Multiple Case Study in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(3), 1-28.

Recuero, A., Río, O. y Álvarez, M. (1994). Aplicación de la teoría de grafos a la planificación y programación de proyectos. *Informes de la Construcción, 46*(431), 49-60.

Reigeluth, C. M. (1979). In search of a better way to organize instruction: The elaboration theory. *Journal of Instructional Development, 2*(3), 8-15.

Reigeluth, C. M. (1987). *Instructional theories in action. Lessons illustrating selected heories and models.* New Jersey: Lawrence Elrbaum Associates.

Reigeluth, C. M. (1999). The elaboration theory: Guidance for scope and sequence decisions. *Instructional design theories and models: A new paradigm of instructional theory, 2*, 425-453.

Reigeluth, C. M. (2013). *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory.* Routledge.

Reigeluth, C. M. y Curtis, R. V. (1987). Learning situations and instructional models. En R. Gagnè, *Instructional technology: foundations* (págs. 175-206). Lawrence Erlbaum Associates.

Reigeluth, C. M. y Stein, F. S. (1983). The elaboration Theory of Instruction. En C. M. Reigeluth, *Instructional design theories and models: An overview of their current status* (págs. 335-381). New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates.

Reigeluth, C. M. y Stein, F. S. (1987). Lesson blueprints based on the elaboration theory of instruction. En C. M. Reigeluth, *Instructional theories in action: Lessons illustrating selected theories and models* (págs. 245-288). Hillsdale: LEA.

Restrepo, J. H. y Sánchez, J. J. (2004). Aplicación de la teoría de grafos y el algoritmo de Dijkstra para determinar las distancias y las rutas más cortas en una ciudad. *Scientia et Technica, 3*(26).

Richards, W. D. y Seary, A. J. (2000). *MultiNet for Windows.*

Rico, L. (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (págs. 39–59). Barcelona: ICE Universidad de Barcelona – Horsori.

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 1*(1), 22-39.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Alianza Editorial.

Rico, L., Castro, E. y Coriat, M. (1997). Revisión teórica sobre la noción de currículo. En L. Rico, *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (págs. 77-150). Madrid: Síntesis.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Roanes, E. y Laita, L. M. (1998). An applicable topology-independent model for railway interlocking systems. *Mathematics and Computers in Simulation, 45*(1), 175-183.

Roanes, E., Martínez, A., García, A. y Roanes, E. (2008). Unas reflexiones sobre el reconocimiento de rutas en mapas ferroviarios y la teoría de grafos. *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas)*(78), 79-90.

Roanes, E., Martínez, A., García, A., Wester, M. J. y Roanes, E. (2011). Automatically obtaining railway maps from a set of historical events. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas, 105*(1), 149-165.

Rodríguez, J. L. (1983). La estructura del mensaje en el acto didáctico: revisión del problema y propuesta metodológica. *Enseñanza & Teaching: Revista interuniversitaria de didáctica*(1), 57-76.

Rodríguez, M. L. (2008). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva.* Octaedro.

Romo, R., Vélez, H., Solís, G., Luna, B. C. y Espinoza, A. (2015). Estudio de la probabilidad de conexión en epilepsia: grafos. *XII Congreso participación de la mujer en la ciencia.* León.

Sacristán, J. G. y Gómez, A. P. (1989). *La enseñanza: su teoría y su práctica* (Vol. 57). Ediciones AKAL.

Salas, R. E. y Rodríguez, J. E. (2013). Análisis de complejidad algorítmica. *Vínculos, 1*(2), 3-12.

Salinas, J. (2010). Una propuesta de utilización de mapas conceptuales en la evaluación: evaluar aprendizajes a partir de mapas colaborativos construidos, compartidos, organizados y criticados por los estudiantes. *Concept Maps: Making Learning Meaningful Proceedings of the fourth international conference on concept mapping*, (págs. 436-443). Chile.

Salinas, J., de Benito, B. y Darder, A. (2011). Los mapas conceptuales como organizadores del proceso de enseñanza-aprendizaje: los itinerarios de aprendizaje. *Investigació I Innovació Educativa I Socioeducativa, 3*(1), 63-74.

Salinas, J., de Benito, B. y García, M. (2008). Colaborative Construction of a Concept Map about Flexible Education. *Concept mapping: Connecting Educators. Proceedings of the Third International Conference on Concept Maps.* Finland.

Sánchez, J. M., Moratalla, A. y Sanz, A. (2012). Grafos y diseño arquitectónico. *II Jornada Internacional Matemáticas Everywhere (CIEM)*, (págs. 203-216). Castro Urdiales.

Sánchez, P. y Anguera, M. T. (1993). Aproximación al PERT en evaluación de programas desde las técnicas matemáticas de análisis de grafos. *Anales de psicología, 9*(2), 213-226.

Santelices, L. (1990). La comprensión de lectura en textos de Ciencias Naturales. *Enseñanza de las Ciencias, 8*, 59-64.

Santos, J. I., del Olmo, R. y Pajares, J. (2006). Estudio de la red de participaciones en tribunales de tesis doctorales de Organización y Gestión de Empresas en España. *X Congreso de Ingeniería de Organización.* Valencia.

Santos, L. M. (1996). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schmitz, L. (1983). An improved transitive closure algorithm. *Computing, 30*(4), 359-371.

Schnorr, C. P. (1978). An algorithm for transitive closure with linear expected time. *SIAM Journal on Computing, 7*(2), 127-133.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, 41-51.

Schult, D. A. y Swart, P. (2008). Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. *Proceedings of the 7th Python in Science Conferences (SciPy 2008)*, (págs. 11-16).

Schvaneveldt, R. W. (1990). *Pathfinder associative networks: Studies in knowledge organization.* New Jersey: Ablex Publishing.

Scott, J. (2012). *Social network analysis.* Sage.

Serrano, R. C. (2000). Actividades de enseñanza y libros de texto. *Investigación en la Escuela*(40), 97-106.

Shannon, P., Markiel, A., Ozier, O., Baliga, N. S., Wang, J. T., Ramage, D., Amin, N., Schwikowski, B. y Ideker, T. (2003). Cytoscape: a software environment for integrated models of biomolecular interaction networks. *Genome research, 13*(11), 2498-2504.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerado y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15*(1), 21-50.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Soletta, J. H., Farfán, F. D. y Ruiz, G. (2011). Aplicación de la Teoría de Grafos al Análisis de la Actividad Eléctrica del Cerebro. *XVIII Congreso Argentino de Bioingeniería.*

Stiefel, B. M. (2008). *Competencias básicas: hacia un nuevo paradigma educativo.* Narcea Ediciones.

Suero, M. I., Montanero, M. M. y Montanero, F. M. (1999). Los fenómenos físicos como contenido organizador. Los mapas de experto tridimensionales. *Catedra Nova*(10), 361-372.

Sugiyama, K. (2002). *Graph drawing and applications for software and knowledge engineers.* World Scientific.

Team, N. (2006). *Network Workbench Tool.* Indiana University, Northeastern University and University of Michigan.

Team, S. (2009). *Science of science (Sci2) tool.* Indiana University and SciTech Strategies.

Tennyson, R. D. (1972). A review of experimental methodology in instructional task sequencing. *AV Communication Review*(2), 147-159.

Tiana, A. (2011). Análisis de las competencias básicas como núcleo curricular en la educación obligatoria española. *Bordón. Revista de Pedagogía, 63*(1), 63-75.

Tiana, A. (2013). El Proyecto Manes y la investigación histórica sobre los manuales escolares (siglos XIX y XX). *Historia de la Educación, 19*, 179-194.

Tutte, W. (2001). *Graph Theory.* Cambridge University Press.

Valle, J. y Manso, J. (2013). Competencias clave como tendencia de la política educativa supranacional de la Unión Europea. *Revista de Educación*.

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. *Perspectives on mathematics education*, 141-171.

Vidal-Abarca, E. y Gilabert, R. (1994). Mapas de ideas: una herramienta para el aprendizaje escolar. Datos y comentarios para una discusión. *Comunicación, lenguaje y educación, 6*(1), 75-86.

Villalobos, A. R. (2010). *Grafos-Software para la construcción, edición y análisis de grafos.* Editorial Bubok.

Villalpando, J. F. (2003). Análisis asintótico con aplicación de funciones de Landau como método de comprobación de eficiencia en algoritmos computacionales. *e-Gnosis, 1*.

West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory.* Prentice Hall.

White, D. R., Batagelj, V. y Mrvar, A. (1999). Anthropology Analyzing Large Kinship and Marriage Networks With Pgraph and Pajek. *Social Science Computer Review, 17*(3), 245-274.

Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 414-421.

Wilson, R. (2013). *Four colors suffice: how the map problem was solved.* Princeton university press.

Wilson, R. J. (1983). *Introducción a la teoría de grafos.* Alianza Editorial.

Wu, F. y Huberman, B. A. (2004). Finding communities in linear time: a physics approach. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 38*(2), 331-338.

Zabalza, M. A. (2009). *Diseño y desarrollo curricular* (Vol. 45). Narcea Ediciones.

Zheng, Z., Alonso, J. L. y García, L. C. (2013). Análisis cibermétrico y visual de Twitter. *Avances en Informática y Automática* (págs. 177-188). Salamanca: Universidad de Salamanca.

ANEXO

Tabla 39. Distribución del grado de los nodos del *Cluster 0*

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
191	1	-	1
190	1	-	-
189	-	-	1
188	1	-	-
186	-	-	1
170	1	-	-
167	-	-	1
159	1	-	-
156	-	-	1
142	1	-	-
137	-	-	1
63	1	-	-
57	2	-	1
50	-	-	2
45	1	-	-
36	2	-	1
35	1	-	-
31	1	-	1
29	2	-	2
28	1	-	-
27	-	-	1
25	1	-	1
24	1	-	1
22	2	2	-
21	1	-	-
20	7	1	-
19	4	3	2
18	7	4	-
17	5	3	1
16	9	6	1
15	10	6	1
14	6	6	1
13	9	9	-
12	10	9	2
11	13	10	2
10	16	11	-
9	15	18	1
8	16	18	3
7	16	25	6
6	17	27	2
5	13	8	7
4	6	19	7
3	6	12	8
2	3	5	9
1	1	4	46
0	-	5	96

Tabla 40. Distribución del grado de los nodos del *Cluster 1*

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
207	3	-	1
206	1	-	1
205	-	-	1
204	-	-	1
201	1	-	-
198	1	-	-
197	-	-	1
196	-	-	1
195	1	-	-
190	1	-	-
189	-	-	1
186	3	-	1
182	1	-	-
181	1	-	1
180	-	-	1
179	-	-	1
177	-	-	1
170	1	-	1
169	1	-	-
169	-	-	1
163	1	-	-
159	3	-	-
158	2	-	-
153	-	-	6
152	-	-	1
135	1	-	-
124	1	-	-
121	-	-	1
107	1	-	-
106	1	-	-
102	-	-	1
99	1	-	-
97	1	-	-
96	1	-	-
91	-	-	1
88	1	-	-
87	1	-	-
83	-	-	1
82	-	-	1
81	2	-	-
75	1	-	-
72	-	-	1
70	-	-	1
69	-	-	1
68	1	-	1
67	1	-	-
61	-	-	1
59	1	-	2

Continuación Tabla 40

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
58	-	-	1
55	1	-	-
54	1	-	-
53	2	-	-
51	1	-	-
44	1	1	-
43	-	-	1
42	1	-	-
39	3	1	-
38	3	1	-
37	5	2	-
36	13	3	-
35	9	6	-
34	9	7	1
33	25	24	-
32	19	25	-
31	12	17	-
30	8	10	2
29	9	15	-
28	7	4	-
27	3	6	-
26	6	10	-
25	2	9	-
24	3	4	-
23	1	2	1
22	1	4	2
21	-	1	-
20	1	-	-
19	1	-	-
18	2	-	-
17	7	4	-
16	2	5	-
15	4	9	-
14	-	4	-
13	2	2	1
12	1	1	-
11	1	-	2
10	2	3	1
9	5	3	1
8	1	5	3
7	1	5	2
6	-	5	1
5	-	4	6
4	-	2	12
3	-	1	11
2	-	1	13
1	1	1	38
0	-	5	80

Tabla 41. Distribución del grado de los nodos del *Cluster 2*

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
11	1	-	-
10	2	-	2
9	-	-	1
5	4	1	-
4	2	3	-
3	3	5	-
2	-	1	2
1	-	-	1
0	-	2	6

Tabla 42. Distribución del grado de los nodos del *Cluster 3*

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
107	1	-	1
89	1	-	-
88	1	-	-
87	-	-	1
86	1	-	1
85	2	-	-
84	4	-	-
83	-	-	3
82	-	-	1
81	-	-	2
80	-	-	1
57	1	-	-
54	1	1	-
53	2	1	-
52	1	1	-
51	1	-	-
50	3	2	1
49	1	1	-
48	4	4	-
47	-	1	-
45	1	-	-
44	-	-	1
43	2	-	-
42	-	-	1
41	5	-	1
40	2	-	1
39	1	-	3
38	-	-	1
35	2	-	-
34	1	-	1

Continuación Tabla 42

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
33	6	1	1
32	2	-	1
31	-	-	1
30	2	2	1
29	5	4	-
28	5	2	1
27	4	3	3
26	4	3	1
25	5	1	-
24	3	2	-
23	5	3	3
22	4	2	4
21	2	3	-
20	7	4	1
19	5	3	1
18	5	3	-
17	4	4	3
16	5	5	1
15	4	3	2
14	2	4	-
13	1	4	2
12	1	3	6
11	5	9	6
10	3	4	1
9	1	2	1
8	3	1	3
7	10	8	2
6	-	3	-
5	3	5	2
4	2	10	2
3	2	8	6
2	-	8	9
1	-	13	17
0	-	7	47

Tabla 43. Distribución del grado de los nodos del *Cluster 4*

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
208	1	-	1
188	1	-	1
156	1	-	-
154	-	-	1
109	1	-	-
108	3	-	-
106	2	-	1
104	-	-	2
103	-	-	2
102	-	-	1
94	1	-	-
87	-	-	1
81	1	-	1
76	1	-	-
68	-	-	1
63	1	-	1
59	1	-	-
57	1	-	1
53	1	-	-
49	-	-	1
48	-	-	1
44	1	-	-
42	1	-	-
41	-	-	1
37	4	1	-
36	2	-	-
35	-	-	1
34	3	1	1
33	2	2	1
32	2	1	-
31	1	-	1
30	-	-	1
29	2	1	1
28	1	1	2
27	3	1	2
25	5	-	-
24	3	2	1
23	1	1	-
22	5	2	-
21	4	2	2
20	10	3	-
19	5	5	2
18	13	12	-
17	12	9	-
16	4	6	-
15	9	10	-
14	14	14	2
13	14	13	2

Continuación Tabla 43

Grado	Número de nodos con grado total	Número de nodos con grado de entrada	Número de nodos con grado de salida
12	11	11	1
11	10	10	3
10	4	8	1
9	12	11	1
8	16	14	2
7	8	12	4
6	5	8	2
5	10	17	9
4	3	15	6
3	10	15	11
2	3	8	17
1	2	6	40
0	-	9	98

Tabla 44. Distribución del grado de los nodos del grafo de estudio

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
1	sist. num decimal	572	0	572	0
2	num natural	546	1	545	0
3	suma num natural	539	2	537	0
4	resta num natural	487	3	484	0
5	multiplic num natural	494	3	491	0
6	division num natural	441	5	436	0
7	p. conmutativa suma num natural	4	3	1	0
8	p. conmutativa resta num natural	5	4	1	0
9	p. conmutativa multiplic num natural	5	4	1	0
10	p. asociativa suma num natural	4	3	1	0
11	p. asociativa resta num natural	5	4	1	0
12	p. asociativa multiplic num natural	5	4	1	0
13	elto neutro suma num natural	4	3	1	0
14	elto neutro multiplic num natural	5	4	1	0
15	p.distributiva num natural	6	5	1	0
16	recta	599	0	599	4
17	representac num natural	392	3	389	1
18	factor num natural	60	4	56	0
19	potencia num natural	50	5	45	0
20	base potencia num natural	13	6	7	0
21	exponente potencia num natural	11	6	5	0
22	multiplic potencias num natural	9	8	1	0

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
23	division potencias num natural	11	10	1	0
24	raiz cuadrada num natural	24	6	18	0
25	raiz cuadrada entera num natural	8	7	1	0
26	division exacta num natural	29	6	23	0
27	divisor num natural	25	7	18	0
28	num primo natural	24	8	16	0
29	factorizac num natural	19	10	9	0
30	multiplo num natural	16	7	9	0
31	num entero	374	2	372	1
32	representac num entero	373	5	368	1
33	valor absoluto num entero	373	6	367	1
34	suma num entero	261	9	252	1
35	elto neutro suma num entero	251	10	241	1
36	opuesto num entero	251	11	240	1
37	factor num entero	345	3	342	1
38	multiplic num entero	351	10	341	1
39	resta num entero	251	12	239	1
40	division num entero	340	11	329	1
41	p. conmutativa suma num entero	170	10	160	1
42	p. conmutativa multiplic num entero	171	11	160	1
43	p. asociativa suma num entero	170	10	160	1
44	p. asociativa multiplic num entero	171	11	160	1
45	elto neutro multiplic num entero	171	11	160	1
46	p.distributiva num entero	176	16	160	1
47	potencia num entero	253	11	242	1
48	base potencia num entero	25	12	13	1
49	exponente potencia num entero	27	12	15	0
50	multiplic potencias num entero	20	16	4	1
51	division potencias num entero	25	21	4	1
52	operac combinadas num entero	183	24	159	1
53	potencia multiplic num entero	20	17	3	1
54	potencia division num entero	25	22	3	1
55	potencia de potencia num entero	17	14	3	1
56	fraccion num entero	158	12	146	3
57	raiz enesima num entero	20	12	8	0
58	raiz cuadrada num entero	20	12	8	1
59	raiz cuadrada entera num entero	14	13	1	1
60	operac combinadas num entero potencias	35	33	2	1
61	multiplic raiz cuadrada num entero	14	13	1	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
62	division raiz cuadrada num entero	17	16	1	1
63	potencia raiz cuadrada num entero	14	13	1	1
64	fraccion equivalente num entero	123	17	106	3
65	multiplic raiz enesima num entero	14	13	1	0
66	division exacta num entero	22	13	9	0
67	num primo entero	19	10	9	0
68	divisor num entero	15	14	1	0
69	factorizac num entero	24	17	7	0
70	multiplo num entero	22	16	6	0
71	fraccion num natural	69	6	63	0
72	numerador fraccion num natural	63	7	56	0
73	denominador fraccion num natural	63	7	56	0
74	ordenac num natural	45	6	39	3
75	fraccion equivalente num natural	51	9	42	0
76	simplificar fraccion num natural	11	10	1	0
77	reduc denominador comun fraccion num natural	16	10	6	0
78	representac fraccion num natural	9	8	1	0
79	mcm num natural	19	12	7	0
80	suma fraccion igual denominad num natural	10	9	1	0
81	suma fraccion distint denominad num natural	12	11	1	0
82	resta fraccion igual denominad num natural	10	9	1	0
83	resta fraccion distint denominad num natural	12	11	1	0
84	fraccion inversa num natural	10	9	1	0
85	multiplic fraccion num natural	12	9	3	0
86	fraccion propia num natural	13	12	1	0
87	fraccion impropia num natural	13	12	1	0
88	potencia fraccion num natural	15	11	4	0
89	multiplic potencias fraccion num natural	24	23	1	0
90	numerador fraccion num entero	135	13	122	3
91	denominador fraccion num entero	135	13	122	3
92	ordenac num entero	16	13	3	0
93	simplificar fraccion num entero	19	18	1	0
94	reduc denominador comun fraccion num entero	25	18	7	0
95	representac fraccion num entero	14	13	1	0
96	mcm num entero	30	25	5	0
97	suma fraccion igual denominad num entero	19	16	3	0
98	suma fraccion distint denominad num entero	22	20	2	0
99	resta fraccion distint denominad num entero	25	23	2	0
100	fraccion inversa num entero	22	18	4	0

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
101	multiplic fraccion num entero	28	17	11	0
102	potencia fraccion num entero	27	19	8	0
103	multiplic potencias fraccion num entero	25	23	2	0
104	suma fraccion num entero	23	22	1	0
105	resta fraccion num entero	26	25	1	0
106	division fraccion num entero	22	19	3	0
107	division potencias fraccion num entero	29	28	1	0
108	razon num natural	42	7	35	0
109	proporcion num natural	42	11	31	0
110	proporcionalidad directa	36	12	24	0
111	porcentaje	10	8	2	0
112	multiplic num decimal	86	5	81	3
113	division num decimal	68	7	61	4
114	proporcionalidad inversa	17	12	5	0
115	regla de tres simple directa	13	12	1	0
116	regla de tres simple inversa	13	12	1	0
117	proporcionalidad compuesta directa	14	13	1	0
118	proporcionalidad compuesta inversa	14	13	1	0
119	cte proporcionalidad	25	13	12	0
120	interes simple	13	12	1	0
121	num decimal	191	1	190	3
122	representac num decimal	38	3	35	3
123	resta num decimal	74	5	69	3
124	parte entera num decimal	29	2	27	3
125	parte decimal num decimal	29	2	27	3
126	num decimal periodico	100	2	98	3
127	num decimal periodico mixto	5	3	2	3
128	raiz cuadrada num decimal	16	6	10	3
129	calculo raiz cuadrada num natural	11	8	3	0
130	aproximac exceso num decimal	12	2	10	2
131	aproximac defecto num decimal	12	2	10	2
132	suma num decimal	74	4	70	3
133	ordenac num decimal	38	12	26	3
134	num decimal exacto	96	2	94	3
135	num decimal periodico puro	4	3	1	3
136	periodo num decimal	4	3	1	3
137	anteperiodo num decimal	5	4	1	3
138	aproximac num decimal	13	4	9	2
139	error aproximac num decimal	7	5	2	2

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
140	error absoluto	12	11	1	2
141	notacion cientifica	9	8	1	0
142	operac combinadas num decimal	12	11	1	0
143	num racional	111	18	93	3
144	num irracional	96	4	92	3
145	num real	114	23	91	3
146	potencia num decimal	42	6	36	3
147	recta real	41	24	17	3
148	segmento	272	2	270	4
149	semirrecta	205	2	203	4
150	potencia num real	49	26	23	3
151	logaritmo num real	35	27	8	3
152	multiplic num real	50	25	25	3
153	suma num real	69	25	44	3
154	division num real	51	25	26	3
155	resta num real	66	25	41	3
156	incognita	204	0	204	1
157	exp algebraica	223	20	203	1
158	termino exp algebraica	25	21	4	1
159	monomio	84	21	63	1
160	resta monomios	90	29	61	1
161	suma monomios	90	29	61	1
162	multiplic monomios	61	31	30	1
163	coefte exp algebraica	24	22	2	1
164	parte literal exp algebraica	24	22	2	1
165	polinomio	76	31	45	1
166	suma polinomios	66	32	34	1
167	resta polinomios	62	32	30	1
168	multiplic polinomios	58	35	23	1
169	potencia polinomios	38	36	2	1
170	valor numerico exp algebraica	31	28	3	1
171	division monomios	43	32	11	1
172	division polinomios	46	36	10	1
173	raiz polinomio	36	34	2	1
174	ecuacion	170	21	149	1
175	solucion ecuacion	136	29	107	1
176	fraccion algebraica	47	33	14	1
177	fraccion algebraica equivalente	43	38	5	1
178	simplificar fraccion algebraica	43	41	2	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
179	fraccion algebraica inversa	40	38	2	1
180	multiplic fraccion algebraica	41	38	3	1
181	divisor polinomio	38	37	1	1
182	factorizar polinomio	40	36	4	1
183	multiplo polinomio	38	36	2	1
184	ecuacion grado 1	125	22	103	1
185	solucion ecuacion grado 1	36	30	6	1
186	ecuacion equivalente	35	30	5	1
187	resolucion ecuacion grado 1 sin denominad	39	36	3	1
188	resolucion ecuacion grado 1 con denominad	52	49	3	1
189	ecuacion grado 2	32	22	10	1
190	resolucion ecuacion grado 2	41	37	4	1
191	ecuacion bicuadrada	40	39	1	1
192	potencia raiz enesima num entero	15	13	2	1
193	ecuacion fraccion algebraica	36	35	1	1
194	mcm polinomio	39	38	1	1
195	suma fraccion algebraica	42	41	1	1
196	resta fraccion algebraica	42	41	1	1
197	division fraccion algebraica	41	40	1	1
198	ecuacion radical	28	25	3	1
199	ecuacion logaritmica	40	36	4	3
200	logaritmo multiplic num real	33	31	2	3
201	logaritmo division num real	34	32	2	3
202	logaritmo potencia num real	31	29	2	3
203	ecuacion exponencial	38	35	3	3
204	resolucion ecuacion logaritmica	56	55	1	3
205	inecuacion	30	22	8	1
206	solucion inecuacion	35	31	4	1
207	inecuacion grado 1	26	23	3	1
208	resolucion ecuacion grado 1	53	51	2	1
209	sistema inecuaciones grado 1	25	24	1	1
210	resolucion inecuacion grado 1	56	55	1	1
211	inecuacion grado 2	24	23	1	1
212	sistema ecuaciones grado 1	109	23	86	1
213	solucion sistema ecuaciones grado 1	117	32	85	1
214	resolucion sistema ecuaciones grado 1 sustitucion	37	36	1	1
215	resolucion sistema ecuaciones grado 1 reduccion	37	36	1	1
216	resolucion sistema ecuaciones grado 1 igualacion	37	36	1	1
217	sistema ecuaciones grado 1 compatible	38	33	5	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
218	sistema ecuaciones grado 2	27	23	4	1
219	solucion sistema ecuaciones grado 2	35	32	3	1
220	sistema ecuaciones grado 2 equivalente	35	33	2	1
221	sistema ecuaciones grado 1 equivalente	34	33	1	1
222	sucesion num real	39	24	15	3
223	termino sucesion num real	36	25	11	3
224	indice sucesion num real	28	25	3	3
225	progresion aritmetica	33	30	3	3
226	termino general sucesion num real	36	34	2	3
227	diferencia progresion aritmetica	32	31	1	3
228	progresion geometrica	32	28	4	3
229	razon progresion geometrica	31	29	2	3
230	angulo central circunferencia	11	10	1	4
231	circunferencia	59	2	57	4
232	longitud	52	1	51	4
233	arco circunferencia	14	3	11	4
234	radio circunferencia	27	6	21	4
235	centro circunferencia	44	3	41	4
236	origen de coord	54	7	47	3
237	sistema de coord	52	8	44	3
238	angulo	204	3	201	4
239	triangulo rectangulo	39	13	26	4
240	cateto	24	14	10	4
241	hipotenusa	24	14	10	4
242	seno angulo	45	41	4	4
243	coseno angulo	46	41	5	4
244	tangente angulo	43	40	3	4
245	triangulo	80	8	72	4
246	lado poligono	167	7	160	4
247	recta perpendicular	71	5	66	3
248	ejes de coord	56	6	50	3
249	coordenadas punto	37	9	28	3
250	magnitud	164	0	164	4
251	variable depte	56	1	55	3
252	variable indepte	56	1	55	3
253	variable	57	0	57	3
254	funcion	58	4	54	3
255	puntos discontinuidad	18	6	12	3
256	punto	347	0	347	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
257	funcion creciente	58	41	17	3
258	funcion decreciente	58	41	17	3
259	maximo funcion	56	43	13	3
260	minimo funcion	56	43	13	3
261	funcion propor directa	36	27	9	0
262	funcion lineal	52	44	8	0
263	ecuac funcion	30	27	3	0
264	abscisa	22	10	12	3
265	ordenada	22	10	12	3
266	recorrido funcion	27	5	22	3
267	tasa variacion funcion	54	34	20	3
268	ordenac num real	49	30	19	3
269	simetria axial	13	11	2	4
270	simetria central	8	6	2	4
271	funcion periodica	6	5	1	3
272	intervalo	42	27	15	3
273	funcion convexa	45	33	12	3
274	funcion concava	45	33	12	3
275	raiz cuadrada num real	33	26	7	3
276	valor absoluto num decimal	13	4	9	3
277	razon trigonometrica angulo	46	44	2	4
278	dominio funcion	16	5	11	3
279	ptos corte ejes funcion	28	17	11	3
280	funcion continua	17	6	11	3
281	funcion discontinua	18	7	11	3
282	ptos inflexion funcion	46	35	11	3
283	representac funcion	77	67	10	3
284	funcion cuadratica	29	28	1	1
285	parabola	5	4	1	4
286	funcion polinomica	38	37	1	1
287	funcion racional	40	39	1	1
288	funcion propor inversa	19	18	1	0
289	hiperbola	13	12	1	3
290	funcion exponencial	42	41	1	3
291	funcion logaritmica	43	42	1	3
292	funcion radical	45	44	1	3
293	funcion valor absoluto	11	10	1	3
294	funcion trigonometrica	51	50	1	4
295	unidad de medida	9	0	9	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
296	capacidad	2	1	1	4
297	metro	5	3	2	4
298	superficie	56	1	55	4
299	volumen	19	1	18	4
300	masa	2	1	1	4
301	medicion	5	4	1	4
302	instrumento medida	1	0	1	4
303	acotacion	7	5	2	2
304	conversion unidades	8	6	2	0
305	rectas paralelas	107	35	72	1
306	rectas secantes	37	36	1	1
307	segmentos proporcionales	26	21	5	0
308	angulo poligono	109	9	100	4
309	razon de semejanza	17	14	3	0
310	poligono	181	6	175	4
311	altura triangulo	18	14	4	4
312	extremo segmento	182	3	179	4
313	angulo recto	101	4	97	4
314	punto medio segmento	27	4	23	4
315	distancia entre dos puntos	88	0	88	4
316	angulo llano	16	4	12	4
317	vertice angulo	9	4	5	4
318	lado angulo	7	4	3	4
319	grado angulo	9	4	5	4
320	minuto angulo	9	4	5	4
321	segundo angulo	9	4	5	4
322	suma angulos	11	10	1	4
323	resta angulos	12	11	1	4
324	multiplic angulos	12	11	1	4
325	division angulos	14	13	1	4
326	cuerda circunferencia	36	5	31	4
327	longitud circunferencia	19	5	14	4
328	numero pi	32	19	13	4
329	diametro circunferencia	34	7	27	4
330	longitud arco circunferencia	7	6	1	4
331	circulo	37	3	34	4
332	area	54	2	52	4
333	area circulo	13	7	6	4
334	circunferencias concentricas	10	4	6	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
335	corona circular	11	6	5	4
336	sector circular	13	9	4	4
337	area sector circular	15	13	2	4
338	area corona circular	11	10	1	4
339	trapecio circular	12	10	2	4
340	area trapecio circular	15	14	1	4
341	segmento circular	10	8	2	4
342	area segmento circular	13	12	1	4
343	area triangulo	15	12	3	4
344	segmentos consecutivos	181	4	177	4
345	linea poligonal	181	5	176	4
346	angulo convexo	9	5	4	4
347	angulo concavo	9	5	4	4
348	angulo agudo	6	5	1	4
349	angulo obtuso	6	5	1	4
350	mediatriz segmento	18	9	9	4
351	mediatriz triangulo	18	16	2	4
352	circuncentro	18	17	1	4
353	bisectriz angulo	7	4	3	4
354	bisectriz triangulo	15	13	2	4
355	incentro	15	14	1	4
356	vertice poligono	14	7	7	4
357	mediana triangulo	13	12	1	4
358	cuadrilatero	79	8	71	1
359	trapecio	52	44	8	1
360	paralelogramo	104	44	60	1
361	plano	29	1	28	4
362	distancia punto recta	2	0	2	4
363	perimetro	20	2	18	4
364	perimetro poligono	17	10	7	4
365	rectangulo	72	48	24	1
366	perimetro rectangulo	53	52	1	1
367	calculo perimetro poligono	23	17	6	4
368	cuadrado	59	48	11	1
369	perimetro cuadrado	53	52	1	1
370	perimetro triangulo	13	12	1	4
371	perimetro trapecio	49	48	1	1
372	rombo	53	48	5	1
373	perimetro rombo	53	52	1	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
374	romboide	53	48	5	1
375	perimetro romboide	53	52	1	1
376	area rectangulo	56	52	4	1
377	area cuadrado	56	52	4	1
378	area paralelogramo	49	48	1	1
379	area trapecio	50	48	2	1
380	poligono regular	35	11	24	4
381	area poligono regular	22	15	7	4
382	apotema poligono	14	9	5	4
383	area rombo	53	52	1	1
384	diagonal poligono	8	7	1	4
385	area romboide	53	52	1	1
386	eje simetria	14	10	4	4
387	centro simetria	8	5	3	4
388	giro	7	4	3	4
389	direccion	24	0	24	3
390	sentido	24	0	24	3
391	vector	28	5	23	3
392	sentido vector	13	6	7	3
393	origen vector	10	7	3	3
394	extremo vector	10	7	3	3
395	coordenadas vector	38	26	12	3
396	suma geom vectores	11	9	2	3
397	suma num vectores	29	27	2	3
398	modulo vector	13	8	5	3
399	direccion vector	15	6	9	3
400	vectores equipolentes	12	11	1	3
401	calculo modulo vector	53	52	1	3
402	ecuacion general recta	97	22	75	1
403	sistema ecuaciones grado 1 compatible deter	36	34	2	1
404	sistema ecuaciones grado 1 incompatible	106	33	73	1
405	sistema ecuaciones grado 1 compatible indeter	35	34	1	1
406	vector director	13	7	6	3
407	suma vectores	33	32	1	3
408	multiplic num real por vector	45	44	1	3
409	pendiente recta	48	46	2	3
410	poliedro	70	7	63	4
411	vertice poliedro	42	8	34	4
412	cara poliedro	54	8	46	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
413	prisma	68	46	22	1
414	planos paralelos	14	2	12	4
415	arista poliedro	11	8	3	4
416	piramide	31	12	19	4
417	triangulo isosceles	14	9	5	4
418	piramide recta	17	14	3	4
419	base piramide	14	13	1	4
420	poliedro regular	25	15	10	4
421	triangulo equilatero	12	9	3	4
422	pentagono	10	8	2	4
423	cilindro	56	49	7	1
424	base cilindro	51	50	1	1
425	cono	25	14	11	4
426	vertice cono	18	17	1	4
427	base cono	18	17	1	4
428	semicirculo	22	9	13	4
429	esfera	22	10	12	4
430	planos secantes	6	2	4	4
431	angulo diedro	8	6	2	4
432	poligono convexo	13	11	2	4
433	poligono concavo	13	11	2	4
434	base prisma	54	50	4	1
435	hexagono	9	8	1	4
436	paralalepipedo	55	48	7	1
437	vertice piramide	14	13	1	4
438	distancia punto plano	2	0	2	4
439	distancia plano plano	1	0	1	1
440	prisma regular	56	52	4	1
441	area prisma regular	57	56	1	1
442	calculo area poligono regular	33	30	3	4
443	calculo area rectangulo	58	55	3	1
444	cubo	58	54	4	1
445	area cubo	59	58	1	1
446	calculo area cuadrado	58	55	3	1
447	ortoedro	57	53	4	1
448	area ortoedro	58	57	1	1
449	piramide regular	21	19	2	4
450	area piramide regular	24	23	1	4
451	calculo area triangulo	29	28	1	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
452	tronco piramide	19	15	4	4
453	area tronco piramide	20	19	1	4
454	calculo area trapecio	55	54	1	1
455	area cilindro	54	53	1	1
456	calculo area circulo	34	29	5	4
457	area cono	19	18	1	4
458	generatriz cono	17	15	2	4
459	tronco cono	17	15	2	4
460	area tronco cono	20	19	1	4
461	area esfera	15	14	1	4
462	volumen prisma regular	56	55	1	1
463	volumen ortoedro	57	56	1	1
464	volumen cubo	58	57	1	1
465	volumen piramide	17	15	2	4
466	volumen tronco piramide	19	18	1	4
467	calculo volumen piramide	33	32	1	4
468	volumen cilindro	53	52	1	1
469	volumen cono	18	17	1	4
470	volumen esfera	14	13	1	4
471	poblacion	43	0	43	0
472	variable estadistica	42	1	41	0
473	frecuencia absoluta	20	4	16	0
474	frecuencia relativa	22	9	13	0
475	media aritmetica simple	25	20	5	0
476	frecuencia absoluta acumulada	8	7	1	0
477	desviacion media	30	26	4	0
478	varianza	47	44	3	3
479	desviacion tipica	48	47	1	3
480	media aritmetica ponderada	23	20	3	0
481	variable estadistica bidimensional	9	2	7	0
482	diagrama dispersion	17	12	5	0
483	pendiente funcion	49	47	2	0
484	correlacion lineal	51	49	2	0
485	covarianza	43	42	1	3
486	permutaciones	8	7	1	0
487	factorial	9	5	4	0
488	variaciones sin repeticion	8	7	1	0
489	variaciones con repeticion	8	7	1	0
490	combinaciones sin repeticion	8	7	1	0

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
491	num combinatorio	8	7	1	0
492	experimento aleatorio	18	0	18	0
493	espacio muestral	18	1	17	0
494	suceso aleatorio	18	2	16	0
495	probab de un suceso	21	13	8	0
496	suceso equiprobable	15	14	1	0
497	intersec sucesos aleatorios	11	4	7	0
498	union conjuntos	2	0	2	0
499	intersec conjuntos	8	0	8	0
500	probab intersec sucesos aleatorios	20	16	4	0
501	probab condicionada	39	37	2	0
502	suceso contrario	4	3	1	0
503	union sucesos aleatorios	5	4	1	0
504	sumando num natural	3	3	0	0
505	minuendo num natural	4	4	0	0
506	sustraendo num natural	4	4	0	0
507	operac combinadas num natural	15	15	0	0
508	potencia multiplic num natural	9	9	0	0
509	potencia division num natural	11	11	0	0
510	potencia de potencia num natural	8	8	0	0
511	cuadrado perfecto num natural	6	6	0	0
512	radical raiz num natural	7	7	0	0
513	radicando raiz num natural	7	7	0	0
514	indice raiz num natural	7	7	0	0
515	raiz cuadrada exacta num natural	7	7	0	0
516	resto raiz cuadrada entera num natural	8	8	0	0
517	division entera num natural	6	6	0	0
518	dividendo num natural	6	6	0	0
519	cociente num natural	6	6	0	0
520	resto num natural	6	6	0	0
521	num compuesto natural	8	8	0	0
522	mcd num natural	11	11	0	0
523	criba Eratostenes	10	10	0	0
524	factor comun num entero	16	16	0	1
525	cuadrado perfecto num entero	12	12	0	1
526	potencia num entero exp negativo	16	16	0	0
527	potencia num entero exp fraccionario	17	17	0	0
528	raiz cuadrada exacta num entero	13	13	0	1
529	resto raiz cuadrada entera num entero	14	14	0	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
530	calculo raiz cuadrada num entero	18	18	0	1
531	operac combinadas num entero potencias raices	38	38	0	1
532	division raiz enesima num entero	16	16	0	0
533	raiz de raiz enesima num entero	13	13	0	0
534	racionalizacion fraccion num entero	21	21	0	0
535	dividendo num entero	12	12	0	0
536	cociente num entero	12	12	0	0
537	resto num entero	12	12	0	0
538	mcd num entero	21	21	0	0
539	amplificar fraccion num natural	10	10	0	0
540	fraccion irreducible num natural	14	14	0	0
541	ordenac fraccion num natural	15	15	0	0
542	reduc min denominador comun fraccion num natural	18	18	0	0
543	suma fraccion num natural	13	13	0	0
544	rest fraccion num natural	13	13	0	0
545	division fraccion num natural	11	11	0	0
546	num mixto natural	14	14	0	0
547	base potencia fraccion num natural	12	12	0	0
548	exponente potencia fraccion num natural	12	12	0	0
549	potencia multiplic fraccion num natural	24	24	0	0
550	fraccion propia num entero	20	20	0	0
551	fraccion impropia num entero	20	20	0	0
552	amplificar fraccion num entero	18	18	0	0
553	fraccion irreducible num entero	23	23	0	0
554	ordenac fraccion num entero	25	25	0	0
555	reduc min denominador comun fraccion num entero	31	31	0	0
556	resta fraccion igual denominad num entero	19	19	0	0
557	base potencia fraccion num entero	20	20	0	0
558	exponente potencia fraccion num entero	20	20	0	0
559	potencia multiplic fraccion num entero	24	24	0	0
560	operac combinadas fraccion num entero	33	33	0	0
561	potencia de potencia fraccion num entero	24	24	0	0
562	potencia division fraccion num entero	29	29	0	0
563	regla de tres compuesta	18	18	0	0
564	reparto direct proporcional	14	14	0	0
565	reparto inver proporcional	15	15	0	0
566	interes compuesto	13	13	0	0
567	calculo raiz cuadrada num decimal	12	12	0	0
568	densidad num decimal	13	13	0	3

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
569	fraccion generatriz	23	23	0	3
570	redondear num decimal	5	5	0	2
571	truncar num decimal	5	5	0	2
572	error relativo	15	15	0	2
573	operac notacion cientifica	43	43	0	1
574	representac num racional	19	19	0	0
575	representac num real	24	24	0	3
576	semirrecta real	27	27	0	3
577	suma exp algebraica	24	24	0	1
578	resta exp algebraica	24	24	0	1
579	igualdad notable	37	37	0	1
580	exp algebraica equivalente	29	29	0	1
581	regla ruffini	37	37	0	1
582	th resto	38	38	0	1
583	th factor	40	40	0	1
584	th fundamental algebra	35	35	0	1
585	valor numerico fraccion algebraica	35	35	0	1
586	fraccion algebraica irreducible	42	42	0	1
587	p. conmutativa suma polinomios	33	33	0	1
588	p. asociativa suma polinomios	33	33	0	1
589	elto neutro suma polinomios	33	33	0	1
590	opuesto polinomios	33	33	0	1
591	p. conmutativa multiplic polinomios	36	36	0	1
592	p. asociativa multiplic polinomios	36	36	0	1
593	elto neutro multiplic polinomios	36	36	0	1
594	p.distributiva polinomios	36	36	0	1
595	mcd polinomio	40	40	0	1
596	potencia fraccion algebraica	39	39	0	1
597	miembro ecuacion	22	22	0	1
598	ecuacion equivalente grado 1	31	31	0	1
599	resolucion ecuacion bicuadrada	48	48	0	1
600	resolucion ecuacion fraccion algebraica	52	52	0	1
601	resolucion ecuacion radical	43	43	0	1
602	resolucion ecuacion exponencial	57	57	0	3
603	inecuacion equivalente	32	32	0	1
604	resolucion sistema inecuaciones grado 1	57	57	0	1
605	resolucion inecuacion grado 2	42	42	0	1
606	resolucion sistema ecuaciones grado 1	39	39	0	1
607	resolucion sistema ecuaciones grado 2 sustitucion	41	41	0	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
608	resolucion sistema ecuaciones grado 2 reduccion	41	41	0	1
609	metodo Gauss	40	40	0	1
610	sucesion recurrente num real	33	33	0	3
611	suma sucesion num real	29	29	0	3
612	multiplic sucesion num real	27	27	0	3
613	termino general progresion aritmetica	43	43	0	3
614	suma n terminos progresion aritmetica	35	35	0	3
615	termino general progresion geometrica	41	41	0	3
616	suma n terminos progresion geometrica	36	36	0	3
617	multiplic n terminos progresion geometrica	32	32	0	3
618	radian	14	14	0	4
619	circunferencia goniometrica	14	14	0	4
620	th seno	42	42	0	4
621	th coseno	50	50	0	4
622	cuadrante	9	9	0	4
623	funcion constante	35	35	0	3
624	maximo relativo funcion	44	44	0	3
625	maximo absoluto funcion	44	44	0	3
626	minimo relativo funcion	44	44	0	3
627	minimo absoluto funcion	44	44	0	3
628	funcion afin	45	45	0	0
629	funcion par	18	18	0	4
630	funcion impar	18	18	0	4
631	periodo	6	6	0	3
632	funcion definida a trozos	33	33	0	3
633	representac funcion lineal	86	86	0	3
634	representac funcion cuadratica	82	82	0	3
635	representac funcion polinomica	87	87	0	3
636	representac funcion racional	88	88	0	3
637	representac funcion propor inversa	80	80	0	3
638	representac funcion exponencial	81	81	0	3
639	representac funcion logaritmica	82	82	0	3
640	representac funcion radical	84	84	0	3
641	representac funcion valor absoluto	70	70	0	3
642	representac funcion trigonometrica	85	85	0	3
643	litro	3	3	0	4
644	metro cuadrado	5	5	0	4
645	metro cubico	5	5	0	4
646	gramo	3	3	0	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
647	medicion directa	6	6	0	4
648	estimacion	6	6	0	2
649	cota inferior	6	6	0	2
650	cota superior	6	6	0	2
651	medida forma compleja	8	8	0	0
652	medida forma incompleja	8	8	0	0
653	th tales	54	54	0	1
654	triangulos semejantes	32	32	0	0
655	poligonos semejantes	31	31	0	0
656	figuras semejantes	24	24	0	0
657	th altura	31	31	0	4
658	th cateto	29	29	0	4
659	escala	23	23	0	0
660	segmentos concatenados	4	4	0	4
661	angulos complementarios	5	5	0	4
662	angulos suplementarios	5	5	0	4
663	angulos opuestos vertice	6	6	0	4
664	angulos consecutivos	6	6	0	4
665	angulos adyacentes	7	7	0	4
666	operac combinadas angulos	17	17	0	4
667	circunferencias tgts interiores	3	3	0	4
668	circunferencias tgts exteriores	3	3	0	4
669	circunferencias secantes	3	3	0	4
670	circunferencias interiores	3	3	0	4
671	circunferencias exteriores	3	3	0	4
672	calculo longitud circunferencia	22	22	0	4
673	calculo longitud arco circunferencia	24	24	0	4
674	semicircunferencia	9	9	0	4
675	calculo area sector circular	31	31	0	4
676	calculo area corona circular	32	32	0	4
677	calculo area trapecio circular	33	33	0	4
678	calculo area segmento circular	31	31	0	4
679	poligono irregular	11	11	0	4
680	heptagono	8	8	0	4
681	octogono	8	8	0	4
682	eneagono	8	8	0	4
683	decagono	8	8	0	4
684	endecagono	8	8	0	4
685	dodecagono	8	8	0	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
686	triangulo escaleno	9	9	0	4
687	triangulo acutangulo	14	14	0	4
688	triangulo obtusangulo	14	14	0	4
689	circunferencia circunscrita	19	19	0	4
690	circunferencia inscrita	17	17	0	4
691	ortocentro	15	15	0	4
692	baricentro	13	13	0	4
693	th pitagoras	26	26	0	4
694	trapezoide	44	44	0	1
695	trapecio rectangulo	49	49	0	1
696	trapecio isosceles	45	45	0	1
697	trapecio escaleno	48	48	0	1
698	elipse	8	8	0	0
699	calculo perimetro rectangulo	57	57	0	1
700	calculo perimetro cuadrado	57	57	0	1
701	calculo perimetro triangulo	20	20	0	4
702	calculo perimetro trapecio	53	53	0	1
703	calculo perimetro rombo	57	57	0	1
704	calculo perimetro romboide	57	57	0	1
705	calculo area paralelogramo	51	51	0	1
706	calculo area rombo	57	57	0	1
707	calculo area romboide	55	55	0	1
708	puntos homologos	10	10	0	4
709	traslacion	5	5	0	4
710	simetria ejes de coord	13	13	0	4
711	simetria origen de coord	13	13	0	4
712	plano simetria	12	12	0	4
713	sentido de giro	5	5	0	4
714	angulo giro	5	5	0	4
715	centro giro	5	5	0	4
716	rectas coincidentes	36	36	0	1
717	traslacion vector	12	12	0	3
718	combinac lineal vector	46	46	0	3
719	producto escalar vector	67	67	0	3
720	calculo distancia entre dos puntos	56	56	0	3
721	coordenadas punto medio segmento	42	42	0	3
722	ecuacion vectorial recta	57	57	0	3
723	ecuacion parametrica recta	54	54	0	3
724	ecuacion continua recta	29	29	0	1

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
725	ecuacion punto pendiente recta	51	51	0	3
726	ecuacion explicita recta	51	51	0	3
727	diagonal poliedro	9	9	0	4
728	prisma recto	52	52	0	1
729	prisma oblicuo	52	52	0	1
730	piramide oblicua	14	14	0	4
731	apotema piramide	16	16	0	4
732	altura piramide	16	16	0	4
733	cara piramide	13	13	0	4
734	tetraedro	18	18	0	4
735	octaedro	18	18	0	4
736	dodecaedro	17	17	0	4
737	icosaedro	18	18	0	4
738	formula Euler	21	21	0	4
739	generatriz cilindro	50	50	0	1
740	altura cilindro	52	52	0	1
741	altura cono	21	21	0	4
742	superficie esferica	13	13	0	4
743	semiplano	3	3	0	4
744	posic relativas recta plano	3	3	0	4
745	poliedro convexo	15	15	0	4
746	poliedro concavo	15	15	0	4
747	prisma convexo	52	52	0	1
748	prisma concavo	52	52	0	1
749	prisma triangular	52	52	0	1
750	prisma cuadrangular	55	55	0	1
751	prisma pentagonal	52	52	0	1
752	prisma hexagonal	52	52	0	1
753	piramide convexa	18	18	0	4
754	piramide concava	18	18	0	4
755	semiesfera	12	12	0	4
756	centro esfera	11	11	0	4
757	radio esfera	12	12	0	4
758	polo esfera	11	11	0	4
759	romboedro	53	53	0	1
760	romboiedro	53	53	0	1
761	casquete esferico	12	12	0	4
762	zona esferica	13	13	0	4
763	huso esferico	13	13	0	4

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
764	calculo area prisma regular	71	71	0	1
765	calculo area cubo	64	64	0	1
766	calculo area ortoedro	63	63	0	1
767	calculo area piramide regular	48	48	0	4
768	calculo area tronco piramide	75	75	0	4
769	calculo area cilindro	76	76	0	4
770	calculo area cono	46	46	0	4
771	calculo area tronco cono	47	47	0	4
772	calculo area esfera	28	28	0	4
773	calculo volumen prisma regular	61	61	0	1
774	calculo volumen ortoedro	64	64	0	1
775	calculo volumen cubo	64	64	0	1
776	calculo volumen tronco piramide	37	37	0	4
777	calculo volumen cilindro	73	73	0	4
778	calculo volumen cono	44	44	0	4
779	calculo volumen esfera	27	27	0	4
780	ppo Cavalieri	7	7	0	4
781	variable estadistica cuantitativa	2	2	0	0
782	variable estadistica cualitativa	2	2	0	0
783	variable estadistica discreta	5	5	0	0
784	variable estadistica continua	4	4	0	0
785	muestra	1	1	0	0
786	moda	10	10	0	0
787	mediana	15	15	0	3
788	diagrama barras	58	58	0	1
789	diagrama sectores	27	27	0	4
790	histograma	58	58	0	1
791	rango datos	8	8	0	0
792	frecuencia relativa acumulada	8	8	0	0
793	coeficiente variacion	49	49	0	3
794	primer cuartil	15	15	0	3
795	segundo cuartil	15	15	0	3
796	tercer cuartil	15	15	0	3
797	percentil	15	15	0	3
798	correlacion negativa	52	52	0	0
799	correlacion positiva	52	52	0	0
800	coeficiente correlacion	79	79	0	3
801	recta regresion	50	50	0	0
802	num permutaciones	10	10	0	0

Continuación Tabla 44

Identificador	Contenido	Grado	Grado de entrada	Grado de salida	Cluster
803	num variaciones sin repeticion	11	11	0	0
804	num variaciones con repeticion	11	11	0	0
805	num combinaciones sin repeticion	12	12	0	0
806	suceso seguro	3	3	0	0
807	suceso imposible	3	3	0	0
808	regla laplace	15	15	0	0
809	suceso compatible	5	5	0	0
810	suceso incompatible	5	5	0	0
811	suceso dependiente	40	40	0	0
812	suceso independiente	40	40	0	0
813	probab suceso contrario	37	37	0	3
814	probab union sucesos aleatorios	41	41	0	0